Heilbronn, den 31.3.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3

Blatt 4

Zu bearbeiten bis 7.4.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{C}$ beliebig. Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der DGL

$$f'(t) + f(t-a) \quad = \quad e^{\mu t}$$

mit dem Ansatz $f(t) = ce^{\mu t}$.

Den Spezialfall $\mu + e^{-\mu a} = 0$ dürfen Sie ausschließen.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y' \quad = \quad x - \frac{y}{x}$$

für $x > 0$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'(x) = \frac{x^2}{y(x)^3}$$

Aufgabe 4. Die 4-periodische Funktion $f(t)$ ist definiert durch

$$f(t) \quad = \quad \delta(t-1) + 2\delta(t-2)$$

falls $0 \leq t < 4$ und $f(t+4) = f(t)$ für alle t.

Berechnen Sie die komplexen Fourier Koeffizienten z_k von $f(t)$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$.

Geben Sie dann z_0, z_1, z_2 und z_3 in kartesischen Koordinaten an und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 5. Für jedes $\varepsilon > 0$ sei $g_\varepsilon(t)$ eine stetige Funktion mit

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(t) &\geq 0 \quad \text{für alle } t \\ g_\varepsilon(t) &= 0 \quad \text{für } t \notin [0,\varepsilon] \end{aligned}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)dt = 1.$$

Weiter sei

$$G_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} g_\varepsilon(\tau)d\tau$$

eine Stammfunktion von $g_\varepsilon(t)$.

Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(t)g_\varepsilon(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 6. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t)\sin(t) \\ g(t) &= -\sigma(t)\sin(t). \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)(t)$. Beachten Sie, dass $(f * g)(t) = 0$ für $t < 0$ sein muss!

Aufgabe 7. Berechnen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung der DGL

$$f'(t) + f(t-a) = \cos(t)$$

mit Fourier Transformation. Vereinfachen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Ausblendeigenschaft.

Warum würde hier die Lösung mit Laplace Transformation nicht funktionieren?

Aufgabe 8. Sei $g(t)$ eine Funktion mit Laplace Transformierter $G(s)$. Weiterhin sei $f(t)$ definiert durch

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(t-kT)$$

für ein $T > 0$. Zeigen Sie, dass für die Laplace Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ gilt

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - e^{-sT}}.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst einen Term für $f(t-T)$, wenden Sie den Verschiebungssatz der Laplace Transformation an und überlegen Sie sich, was

$$f(t) - f(t-T)$$

ist.

Aufgabe 9. Sei

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s).$$

Berechnen Sie hiermit die Laplace Transformierte $H(s)$ von

$$h(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{t-3} f(\tau) d\tau.$$

Berechnen Sie weiterhin eine Funktion $g(t)$ so dass

$$h(t) \quad = \quad (f * g)(t).$$

Aufgabe 10. Transformieren Sie die Funktion

$$F(s) \quad = \quad \frac{s^2+1}{(s+1)^3}$$

in den Zeitbereich.

Aufgabe 11. Transformieren Sie die Funktion

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)e^s}$$

in den Zeitbereich. Lösen Sie die Aufgabe auf mehrere Weisen.

Aufgabe 12. Sei $f(t)$ an der Stelle $\hat{t}$ stetig und

$$\sigma(t-\hat{t})f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s).$$

Berechnen Sie damit die Laplace Transformierte von

$$\sigma(t-\hat{t})f'(t).$$

Aufgabe 13. Sei

$$f(t) \quad = \quad t+1.$$

- Berechnen Sie die Laplace Transformierte von $\sigma(t)f(t)$.
- Berechnen Sie $(\sigma(t)f(t))'$ und $\sigma(t)f'(t)$ sowie die Laplace Transformierte von beiden Funktionen.
- Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass wenn

  $$\sigma(t)f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)$$

  gilt

  $$\sigma(t)f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) - f(0^-).$$

Aufgabe 14. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f'(t) + 3f(t) = \sin(2t), \quad f(0^-) = 1$$

für $t \geq 0$ durch Laplace Transformation.

Aufgabe 15. Lösen Sie die DGL

$$f'(t) + f(t) \quad = \quad t, \qquad f(0^-) = 0$$

einmal im Zeitbereich und einmal mit Laplace Transformation. Vergleichen Sie das Ergebnis.

Aufgabe 16. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$f'(t) - f(t) \quad = \quad t\cos(t)$$

für $t \geq 0$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die allgemeine homogene Lösung mit dem $e^{\lambda t}$ Ansatz. Eine partikuläre inhomogene Lösung liefert die Laplace Transformation wenn man z.B. den Startwert $f(0^-) = 0$ wählt.

Aufgabe 17. Berechnen Sie die Lösung der DGL

$$f'(t) + f(t) \quad = \quad \sigma(t) + \delta(t), \qquad f(0^-) \;=\; -1$$

für $t \geq 0$.

Aufgabe 18. Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

Berechnen Sie hiermit die Laplace Transformierte von $\sqrt{t}$.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.