Heilbronn, den 7.4.2025 | Prof. Dr. V. Stahl | SS 25

Übungen zu Mathematik 3

Blatt 5

Zu bearbeiten bis 14.4.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Sei

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{|t|} \\ g_\varepsilon(t) &= \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass $f(t)$ bei $t = 0$ nicht differenzierbar ist.
- Berechnen Sie $(f * g_\varepsilon)(t)$ für beliebiges $\varepsilon > 0$.
- (Freiwillig) Zeigen Sie, dass $(f * g_\varepsilon)(t)$ bei $t = 0$ differenzierbar ist.

Aufgabe 2. Auf einer Straße von A nach B steht eine Messstelle für Schadstoffe. Aufgrund einer besonders schlauen Umweltschutzverordnung müssen Dieselfahrzeuge diese Messstelle weitläufig umfahren. Die Fahrzeit für den direkten Weg von A nach B sei 10 Sekunden, die Fahrzeit über den Umweg sei 50 Sekunden. Vereinfachend wird angenommen, dass alle Autos gleich schnell fahren. Weiterhin fährt die Hälfte aller Fahrzeuge mit Diesel. Sei $f(t)$ die Stromstärke bei A und $h(t)$ die Stromstärke bei B.

- Berechnen Sie eine Funktion $g(t)$ so dass
$$h(t) = (f * g)(t)$$
für alle t.
- Berechnen Sie $h(t)$ für
$$f(t) = \sin^2(\pi t) + 1.$$
Berechnen Sie $h(t)$ für
$$f(t) = c,$$
d.h. die Stromstärke bei A ist konstant.

Aufgabe 3. Sei S ein System mit

$$[S(f)](t) \quad = \quad f(3t).$$

Entscheiden Sie ob S linear und zeitinvariant ist. Begründen Sie Ihre Antwort. Schreiben Sie zunächst hin, was Sie zeigen müssen.

Aufgabe 4. Sei S ein System, das ein Inputsignal f in ein Outputsignal h transformiert, wobei

$$h(t) \quad = \quad f(t) + \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau.$$

Zeigen Sie, dass S linear und zeitinvariant ist.

Aufgabe 5. Berechnen Sie die inverse Laplace Transformierte von

$$F(s) \quad = \quad \frac{s}{e^s(s-1)^2}.$$

Aufgabe 6. Sei

$$f(t) \quad = \quad \mathrm{sign}(t)e^{-t},$$

wobei $\mathrm{sign}(t)$ das Vorzeichen von t ist Beachten Sie, dass diese Funktion einen Sprung bei $t = 0$ hat.

- Berechnen Sie die Laplace Transformierte $F(s)$ von $\sigma(t)f(t)$.
- Berechnen Sie $\sigma(t)f'(t)$ indem Sie $f(t)$ im Zeitbereich ableiten.
- Verifizieren Sie für dieses Beispiel, dass

$$\sigma(t)f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) - f(0^-).$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die partikuläre Lösung $f(t)$ der DGL

$$f'(t-1) + f(t-1) \quad = \quad \delta(t+1),$$

für die eine Laplace Transformierte $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ existiert.

Aufgabe 8. Sei

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s).$$

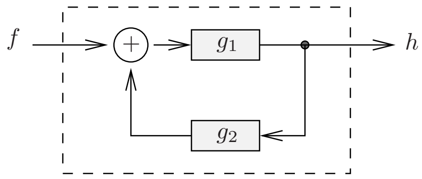
Berechnen Sie hiermit die Laplace Transformierte von $tf'(t)$.

Verifizieren Sie diese allgemeine Formel am Beispiel $f(t) = \sigma(t)t$ ohne Verwendung von Korrespondenzen.

Aufgabe 9. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des folgenden Systems, d.h. die Funktion $G(s)$ so dass

$$H(s) \quad = \quad F(s)G(s).$$

Die Blöcke g_1 bzw. g_2 bedeuten hierbei jeweils die Faltung mit g_1 bzw. g_2.



Aufgabe 10. Bestimmen Sie die Originalfunktion $f(t)$ der Laplace Transformierten

$$F(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2}$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 11. Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t)t^2e^{-3t}.$$

Aufgabe 12. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f(t) + f'(t) \quad = \quad \sigma(t-1), \qquad f(0^-) \; = \; 0$$

für $t \geq 0$. Prüfen Sie Ihr Ergebnis indem Sie die Lösungsfunktion $f(t)$ in die DGL einsetzen. Achten Sie darauf, dass Sie die Faktoren $\sigma(t)$ nicht vergessen.

Aufgabe 13. In einem System bestehe folgender Zusammenhang zwischen Eingangsfunktion $f(t)$ und Ausgangsfunktion $h(t)$:

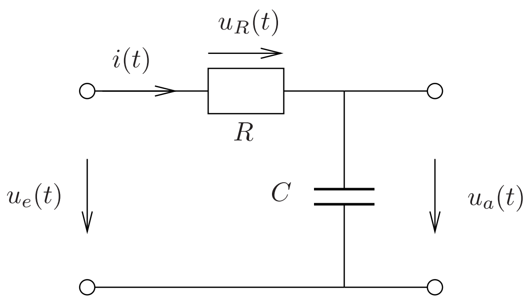
$$f'(t) + f(t) \quad = \quad h'(t) - h(t).$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion

$$G(s) \quad = \quad \frac{H(s)}{F(s)}$$

und die Impulsantwort $g(t)$ des Systems. Sie dürfen dabei annehmen, dass f und h eine Laplace Transformierte haben.

Aufgabe 14. Gegeben sei folgender Vierpol, der aus einem ohmschen Widerstand R und einem Kondensator C besteht:



- Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, in der R, C, $u_e(t)$, $u_a(t)$ und $u_a'(t)$ auftreten.
- Berechnen Sie $U_a(s)$ in Abhängigkeit von $U_e(s)$. Zum Zeitpunkt $t = 0^-$ sei der Kondensator hierbei entladen.
- Berechnen Sie $u_a(t)$ wenn $u_e(t) = \delta(t)$ für $t \geq 0$.
- Berechnen Sie $u_a(t)$ wenn $u_e(t) = \sigma(t)$ für $t \geq 0$.

Aufgabe 15. Skizzieren Sie die Funktion

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k).$$

Diese Funktion heißt Impulszug und spielt in der digitalen Signalverarbeitung eine ganz zentrale Rolle.

Sei $f(t)$ eine beliebige Funktion und

$$f_p(t) = f(t)p(t).$$

Skizzieren Sie auch die Funktion $f_p(t)$. Zeigen Sie unter Verwendung der Ausblendeigenschaft, dass

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta(t-k)$$

wobei

$$f_k = f(k)$$

die Abtastwerte von $f(t)$ bei ganzzahligen Zeitpunkten $t = k$ sind.

Zeigen Sie dann, dass

$$f_p(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-sk}.$$

Im wesentlichen benötigen Sie hierfür nur Linearität.

Aufgabe 16. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \begin{cases} 3 & \text{falls } k = 2 \\ 7 & \text{falls } k = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich, d.h. es sollen keine negativen Exponenten von z auftreten und die Brüche sollen auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden.

Aufgabe 17. Die Funktion

$$f(t) = \sin(t) + t^2$$

wird mit Abtastintervall $\Delta t = 0.1$ abgetastet.

- Berechnen Sie die Abtastwerte f_k.
- Berechnen Sie eine Funktion $g(t)$, die mit Abtastintervall $\Delta t = 0.3$ abgetastet die gleichen Abtastwerte f_k liefert.
- Berechnen Sie für eine beliebige Funktion $f(t)$ und Konstanten $\Delta t_1, \Delta t_2 \neq 0$ die Funktion $g(t)$ mit

  $$f(k\Delta t_1) \quad = \quad g(k\Delta t_2)$$

  für alle k.

Aufgabe 18. Sei $f(t)$ eine Funktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ und $\Delta t > 0$ beliebig. Sei

$$g(t) \quad = \quad \int_{t-\Delta t}^{t} f(\tau) d\tau.$$

Zeigen Sie, dass

$$g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1 - e^{-s\Delta t}}{s} F(s).$$

Lösen Sie die Aufgabe auf zwei Weisen.

- Verwenden Sie den Rechteckimpuls

  $$r(t) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq 0 \text{ und } t < \Delta t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Stellen Sie $g(t)$ im Zeitbereich als Faltungsintegral dar und verwenden Sie den Faltungssatz.
- Verwenden Sie eine Stammfunktion von $f(t)$ um das Integral im Zeitbereich umzuformen. Um Verwechslungen mit der Laplace Transformierten zu vermeiden, ist es sinnvoll, diese Stammfunktion z.B. mit $\hat{f}$ zu bezeichnen. Verwenden Sie dann die Korrespondenzen der Laplace Transformation für Integration im Zeitbereich und den Verschiebungssatz.

Aufgabe 19. Zeigen Sie, dass die z-Transformation linear ist.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.