Übungen zu Mathematik 3

Blatt 6

Zu bearbeiten bis 24.4.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Sei

$$[S(f)](t) \quad = \quad \sin(f(t+1)).$$

Zeigen Sie, dass S zeitinvariant ist.

Aufgabe 2. Sei $S(f) = h$ wobei h die Lösung eines der folgenden Anfangswertprobleme mit rechter Seite f ist.

- Sei

  $$h' + ah = f, \qquad h(0) = 5.$$

  Zeigen Sie, dass S nicht linear ist.
- Sei

  $$h' + ah = f, \qquad h(0) = 0.$$

  Zeigen Sie, dass S linear aber nicht zeitinvariant ist.
- Sei

  $$h' + ah = f, \qquad h(-\infty) = 0.$$

  Zeigen Sie, dass S linear und zeitinvariant ist.

Aufgabe 3. Sei S ein System mit

$$[S(f)](t) \quad = \quad tf(t).$$

Entscheiden Sie, ob S linear bzw. zeitinvariant ist und geben Sie jeweils eine Begründung. Schreiben Sie zunächst auf, was Sie zeigen müssen.

Aufgabe 4. Die Stromstärke am Ein- bzw. Ausgang eines Wasserrohrs sei $f(t)$ bzw. $h(t)$. Das Rohr ist ein lineares, zeitinvariants System, d.h.

$$h(t) \quad = \quad (f * g)(t)$$

wobei $g(t)$ die Impulsantwort ist. Angenommen, das Rohr ist verlustfrei, d.h. das gesamte Wasser, das in das Rohr hineinfließt, kommt auch am anderen Ende irgendwann wieder heraus. Welche Eigenschaft folgt daraus für die Impulsantwort?

Aufgabe 5. Sei $g(t)$ eine beliebige Funktion und

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(t - nT).$$

Damit setzt sich $f(t)$ aus unendlich vielen Kopien von $g(t)$ zusammen, die jeweils um T nach rechts verschoben sind.

Zeigen Sie zunächst, dass für alle t gilt

$$f(t) - f(t - T) = g(t).$$

Führen Sie dann auf beiden Seiten dieser Gleichung die Laplace Transformation durch und leiten Sie dadurch eine Formel her, wie man die Laplace Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ berechnen kann in Abhängikeit der Laplace Transformierten $G(s)$ von $g(t)$.

Aufgabe 6. In einem System mit Eingangsfunktion f und Ausgangsfunktion h bestehe folgender Zusammenhang:

$$\int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau + h'(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{t-1} f(\tau) d\tau$$

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ und die Impulsantwort $g(t)$ dieses Systems.
- Prüfen Sie Ihr Ergebnis nach, indem Sie die Gleichung verifzieren für $f(t) = \delta(t)$ und $h(t) = g(t)$.

Sie dürfen davon ausgehen, dass f und h eine Laplace Transformierte hat.

Aufgabe 7. Für Funktionen $f(t)$, die an der Stelle $t = 0$ einen Sprung haben, gilt für die Ableitung im Zeitbereich

$$\begin{aligned} \sigma(t) f(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) \\ \sigma(t) f'(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) - f(0^-) \end{aligned}$$

wobei $f(0^-)$ der linksseitige Grenzwert von $f(t)$ bei $t = 0$ ist, d.h.

$$f(0^-) \quad = \quad \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(-\varepsilon).$$

Lesen Sie die Begründung im Skript nach! Berechnnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$f'(t) + f(t) \quad = \quad \delta(t), \quad f(0^-) = 5$$

mit Hilfe der Laplace Transformation für $t \geq 0$. Überlegen Sie sich, wie eine Lösungsfunktion der DGL auf ganz $\mathbb{R}$ aussehen muss. Setzen Sie Ihre Lösungsfunktion in die DGL ein und verifzieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 8. In dieser Aufgabe wird der Zusammenhang zwischen analoger und diskreter Faltung hergestellt. Durch Multiplikation von f und g mit der Kammfunktion erhält man die Impulszüge von Abtastwerten

$$\begin{aligned} f_p(t) &= f(t)p(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell \delta(t-\ell) \\ g_p(t) &= g(t)p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \delta(t-k) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Faltung dieser Impulszüge wieder ein Impulszug ergibt, dessen Impulse durch diskrete Faltung der Abstastwerte von f und g berechnet werden können, d.h.

$$(f_p * g_p)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \delta(t-k)$$

wobei

$$h_k = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell g_{k-\ell}$$

die diskrete Faltung der Abtastwerte von f und g ist.

$$\begin{tikzcd}
f_p, g_p \arrow[r, "\text{analoge Faltung}"] \arrow[d, swap, "\substack{\text{Stärke des} \\ k\text{-ten Impulses}}"] & f_p * g_p \arrow[d, "\substack{\text{Stärke des} \\ k\text{-ten Impulses}}"] \\
f_k, g_k \arrow[r, swap, "\text{diskrete Faltung}"] & (f*g)_k
\end{tikzcd}$$

Hinweis: Sie müssen im Beweis die Linearität der Faltung nutzen. Weiterhin bewirkt die Faltung mit einem verschobenen Dirac Impuls eine Verschiebung. Konkret gilt

$$\delta(t-\ell) * \delta(t-k) = \delta(t-k-\ell).$$

Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi jk/n} = 0.$$

Gehen Sie von

$$S = e^{2\pi j0/n} + e^{2\pi j1/n} + \ldots + e^{2\pi j(n-1)/n}$$

aus, multiplizieren Sie beide Seiten mit $e^{2\pi j/n}$, subtrahieren Sie die Gleichungen und lösen Sie nach S auf.

Aufgabe 10. Berechnen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ die z-Transformierte von

$$f_k = \sigma_k a^{2k+1}.$$

Aufgabe 11. Berechnen Sie die Summe

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} k a^k.$$

Sie dürfen die Existenz der Summe voraussetzen. Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$S - aS = \sum_{k=1}^{\infty} a^k.$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \langle 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots \rangle,$$

d.h.

$$f_0 = f_1 = 1, \quad f_2 = f_3 = 0, \quad f_{k+4} = f_k \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 13. Die Folge f_k sei definiert durch

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ f_1 &= 3 \\ f_{k+2} &= f_{k+1} - f_k \qquad \text{für } k \geq 0 \end{aligned}$$

und $f_k = 0$ für $k < 0$.

- Berechnen Sie die z-Transformierte von f_k anhand der gegebenen Rekursionsgleichung mit Hilfe des Verschiebungssatzes.
- Berechnet man die ersten Werte für f_k stellt man fest, dass es sich um eine periodische Folge handelt. Berechnen Sie die z-Transformierte von f_k mit Hilfe der Formel für periodische Formeln.
- Die beiden Ergebnisse sehen zunächst unterschiedlich aus. Wie kann man verifizieren, dass beide Ergebnisse gleich sind? Sie müssen das nicht "von Hand" machen sondern können auch einen Rechner verwenden.

Aufgabe 14. Sei f_k eine n-periodische Folge, d.h.

$$f_{k+n} = f_k \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Verschiebungssatzes dass dann

$$F(z) = \frac{z^n}{z^n - 1} \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k}.$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folgen

$$\begin{aligned} f_k &= \sigma_k k 2^k \\ g_k &= \sigma_{k-2} k 2^k. \end{aligned}$$

Bringen Sie die Ergebnisse auf einen Bruch ohne negative Exponenten.

Aufgabe 16. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = k\sigma_{k-1}\cos(2k-1).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so dass die Zahl j nicht darin auftritt.

Aufgabe 17. Sei S ein System, das eine Folge f wie folgt transformiert:

$$[S(f)]_k = \begin{cases} f_2 & \text{für } k = 0 \\ f_k & \text{sonst.} \end{cases}$$

bzw.

$$S(\langle f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots\rangle) = \langle f_2, f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots\rangle.$$

- Berechnen Sie die Impulsantwort von S.
- Ist S linear? Ist S zeitinvariant? Geben Sie eine kurze Begründung.

Aufgabe 18. Sei S ein System, das eine Folge f transformiert durch

$$[S(f)]_k = kf_k,$$

d.h.

$$S(\langle f_0, f_1, f_2, f_3 \ldots\rangle) = \langle 0, f_1, 2f_2, 3f_3, \ldots\rangle)$$

- Berechnen Sie die Impulsantwort von S.
- Ist S linear? Ist S zeitinvariant? Geben Sie eine kurze Begründung.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.