Übungen zu Mathematik 3

Blatt 7

Zu bearbeiten bis 28.4.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Seien $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ linear abhängig, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ und

$$A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).$$

Zeigen Sie, dass dann die Menge

$$\mathbb{L} = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$$

leer oder unendlich ist.

Sie dürfen alle in der Vorlesung gezeigten Theoreme verwenden.

Aufgabe 2. Das LTI System S mit

$$S(f) = f'$$

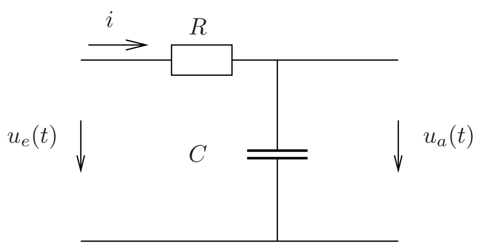
ordnet jeder auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktion ihre Ableitung zu. Ist S injektiv?

Aufgabe 3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = e^{-t}, \quad f(0^-) = 1, \quad f'(0^-) = 0$$

für $t \geq 0$ durch Laplace Transformation.

Aufgabe 4. Gegeben sei folgende Schaltung.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Eingangsspannung $u_e(t)$ angelegt. Der Kondensator ist zu diesem Zeitpunkt entladen. Leiten Sie eine Formel für $u_a(t)$ in Abhängigkeit von $u_e(t)$ her unter Verwendung der Laplace Transformation. Sei nun

$$u_e(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie $u_a(t)$. Für den eingeschwungenen Zustand, d.h.

$$u_e(t) = \cos(t) \text{ für alle } t$$

ließe sich $u_a(t)$ einfach mit komplexer Wechselstromrechnung bestimmen. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse für große Werte von t wenn sich das System eingeschwungen hat.

Aufgabe 5. Seien

$$\begin{aligned} f_k &= \langle 1, 2, 3, 0, 0, 0, \ldots \rangle \\ g_k &= \langle 5, 3, 1, 4, 0, 0, 0, \ldots \rangle \end{aligned}$$

zwei endliche Folgen, d.h. Folgen mit nur endlich vielen Gliedern ungleich Null.

- Berechen Sie die Folge $h_k = (f * g)_k$ durch Faltung.
- Berechnen Sie die z-Transformierte $F(z)$, $G(z)$ und $H(z)$ von f_k, g_k und h_k.
- Multiplizieren Sie $F(z)$ und $G(z)$ indem Sie die Klammern auflösen und Summanden mit gleichem z-Faktor zusammenfassen. Das Ergebnis muss gleich sein wie die in der vorigen Teilaufgabe berechnete Funktion $H(z)$.

Aufgabe 6. Die Funktion

$$f(t) = \sigma(t) \sin(t)$$

wird zu den Zeitpunkten $k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$ abgetastet. Die Abtastwerte sind die Folge

$$f_k = f(k\Delta t).$$

Berechnen Sie die z-Transformierte von f_k. Um zu einer geschlossenen Formel zu kommen, müssen Sie die Sinus Funktion durch komplexe e-Funktionen darstellen. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 7. Die Funktion

$$f(t) = \sigma(t) t \sin(t)$$

wird zu den Zeitpunkten $k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$ abgetastet. Die Abtastwerte sind die Folge

$$f_k = f(k\Delta t).$$

Nutzen Sie das Ergebnis der vorigen Aufgabe und die Korrespondenz

$$k f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -zF'(z)$$

um die z-Transformierte von f_k zu bestimmen.

Aufgabe 8. Berechnen Sie die inverse z-Transformierte von

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 1}.$$

Aufgabe 9. Beim Übergang von der Laplace- zur z-Transformation wurde die Laplace Transformierte von

$$f_p(t) = f(t)p(t)$$

berechnet. Aufgrund der Ausblendeigenschaft hängt $f_p(t)$ nur noch von den Abtastwerten f_k ab und es entsteht die z-Transformierte von f_k. In dieser Aufgabe wird untersucht, was geschieht, wenn das Abtastintervall Δt sehr klein wird. Sei nun

$$p(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$$

ein Impulszug, dessen Impulse Abstand Δt haben und Stärke Δt.

- Berechnen Sie die Laplace Transformierte $F_p(s)$ von $f(t)p(t)$ in Abhängigkeit von Δt.
- Zeigen Sie, dass wenn die Impulse sehr nahe zusammenliegen, d.h. Δt sehr klein ist, $F_p(s)$ in die Laplace Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ übergeht.
- Für kleine Δt gilt somit

  $$F_p(s) \approx F(s)$$

  und damit im Zeitbereich

  $$f(t)p(t) \approx f(t).$$

  Andererseits sehen $f(t)p(t)$ und $f(t)$ ja völlig unterschiedlich aus. In welchem Sinn kann man trotzdem sagen, dass sie auch im Zeitbereich ähnlich sind?

Hinweis:

- Verwenden Sie eine Hilfsfunktion

  $$g(t) = f(t)e^{-st}$$

- Die Fläche unter $g(t)$ lässt sich durch eine Summe von Rechtecken der Höhe $g(k\Delta t)$ und Breite Δt approximieren:

  $$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\Delta t)\Delta t \quad \text{falls } \Delta t \text{ klein.}$$

Aufgabe 10. Berechnen Sie die inverse z-Transformierte f_k der Funktion

$$F(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)^2}$$

mit Partialbruchzerlegung. Vereinfachen Sie den Ergebnisterm so weit wie möglich. Sie dürfen alle Korrespondenzen der Formelsammlung benutzen.

Aufgabe 11. Sei

$$f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z)$$

und

$$g_k \quad = \quad k e^{ak} f_k.$$

Berechnen Sie $G(z)$ in Abhängigkeit von $F(z)$.

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\ell=a}^{b} f_{\ell-k} \quad = \quad \sum_{\ell=a-k}^{b-k} f_\ell.$$

Aufgabe 13. Sei g_k eine beliebige Folge.

- Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\ell=-\infty}^{k} g_\ell \quad = \quad (\sigma * g)_k \qquad \text{für alle } k.$$

- Berechnen Sie hiermit und unter Verwendung des Faltungssatzes die z-Transformierte der Folge

$$f_k \quad = \quad \sigma_k \sum_{\ell=0}^{k} \sin(\ell).$$

Sie müssen das Ergebnis nicht vereinfachen.

Aufgabe 14. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0 \\ 2 & \text{falls } k = 5 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \sigma_k k^2 a^k$$

Aufgabe 16. Sei

$$f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z).$$

Berechnen Sie die z-Transformierte von $k^3 f_k$.

Aufgabe 17. Zeigen Sie, dass für alle k, m gilt

$$\delta_{k-m} f_k \quad = \quad \delta_{k-m} f_m.$$

Aufgabe 18. Zeigen Sie mit Hilfe der z-Transformation, dass

$$f_{.-\hat{k}} * g_{.-\hat{m}} \quad = \quad (f * g)_{.-(\hat{k}+\hat{m})}.$$

Aufgabe 19. Sei S ein kausales LTI System mit

$$S(\langle 1, 4, -2, 0, 0, \ldots \rangle) \quad = \quad \langle 2, 9, -1, -6, 2, 0, 0, \ldots \rangle.$$

Berechnen Sie die Impulsantwort g von S. Lösen Sie die Aufgabe einmal im Zeitbereich und einmal mit dem Faltungssatz und Polynomdivision.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.