Übungen zu Mathematik 3

Blatt 8

Zu bearbeiten bis 20.11.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f'(t) + 3f(t) = \sin(2t), \quad f(0^-) = 1$$

für $t \geq 0$ durch Laplace Transformation.

Aufgabe 2. Sei $g(t)$ eine π-periodische Funktion. Dann ist

$$f(t) \quad = \quad g(t)\cos(t)$$

eine 2π-periodische Funktion. Seien z_k die Fourier Koeffizienten von f. Zeigen Sie, dass für alle geraden k gilt $z_k = 0$.

Aufgabe 3. Für ein System mit Eingangsgröße $f(t)$ und Ausgangsgröße $h(t)$ gelte der Zusammenhang

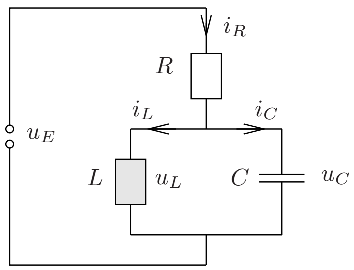
$$h''(t) - h(t) \quad = \quad f'(t) - f(t)$$

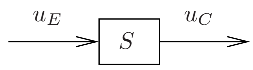
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion und die Impulsantwort des Systems. Sie dürfen dabei annehmen, dass die Laplace Transformierte von $f(t)$ und $h(t)$ existiert. Vergessen Sie den Faktor $\sigma(t)$ bei der Rücktransformation nicht!
- Berechnen Sie $h(t)$ für eine beliebige Störfunktion $f(t)$ durch Faltung und Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.
- Freiwilige Zusatzaufgabe: Prüfen Sie das Ergebnis durch Einsetzen in die DGL nach. Nutzen Sie, dass

  $$(f * g)' \quad = \quad f * g'.$$

  und für die berechnete Impulsantwort $g'(t) = \delta(t) - g(t)$ gilt

Aufgabe 4. Durch folgende Schaltung ist ein LTI System S gegeben mit Eingangsfunktion $u_E(t)$ und Ausgangsfunktion $u_C(t)$. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems.

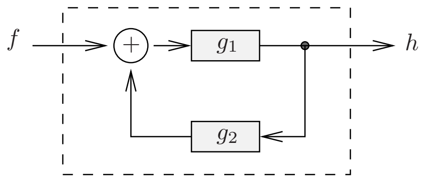




Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des folgenden Systems, d.h. die Funktion $G(s)$ so dass

$$H(s) \quad = \quad F(s)G(s).$$

Die Blöcke g_1 bzw. g_2 bedeuten hierbei jeweils die Faltung mit g_1 bzw. g_2.



Aufgabe 6. Berechnen Sie die inverse z-Transformierte von

$$F(z) \quad = \quad \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{z^{-1} + z^{-2}}.$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ die z-Transformierte von

$$f_k = \sigma_k a^{2k+1}.$$

Aufgabe 8. Sei

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0 \\ a & \text{falls } k = 0 \\ b & \text{falls } k = 1 \end{cases}$$

und

$$f_{k+2} = \frac{1}{4} f_{k+1} + \frac{3}{4} f_k \qquad \text{für } k \geq 0.$$

- Berechnen Sie die z-Transformierte $F(z)$ von f_k. Hinweis: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sigma_k f_{k+2} = \sigma_k \frac{1}{4} f_{k+1} + \sigma_k \frac{3}{4} f_k.$$

- Transformieren Sie $F(z)$ in den Zeitbereich zurück um einen geschlossenen Term für f_k zu erhalten.
- Berechnen Sie den Grenzwert von f_k für $k \to \infty$.

Aufgabe 9. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = k\,\sigma_{k-1}\,\cos(k-1).$$

Sie müssen die entstehenden Terme *nicht* vereinfachen.

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass für alle k, m gilt

$$\delta_{k-m} f_k = \delta_{k-m} f_m.$$

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\ell=a}^{b} f_{\ell-k} = \sum_{\ell=a-k}^{b-k} f_\ell.$$

Aufgabe 12. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = 2^{3-k} \sigma_{k-1}$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Hinweis: Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Potenzrechnung bevor Sie den Verschiebungssatz anwenden.

Aufgabe 13. Berechnen Sie die z-Transformierte der periodischen Folge

$$f_k = \langle 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots \rangle.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Im Ergebnisterm dürfen keine negativen Exponenten von z auftreten.

Aufgabe 14. Sei $s \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{re}(s) > a \quad \text{gdw.} \quad |e^s| > e^a.$$

Aufgabe 15. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \sigma_k k^2 a^k$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie die inverse z-Transformierte von

$$F(z) = \frac{1}{z^5(z-1)}.$$

Hinweis: Sie brauchen hier *keine* Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 17. Sei $f(t)$ eine Funktion mit Abtastwerten

$$f_k = f(k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

und

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k).$$

Sei

$$\begin{aligned} f(t)p(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet_L \quad F_p(s) \\ f_k &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet_z \quad F_z(z) \end{aligned}$$

die Laplace Transformierte von $f(t)p(t)$ bzw. die z-Transformierte von f_k. Zeigen Sie, dass

$$F_p(s) = F_z(e^s).$$

Aufgabe 18. Sei

$$\begin{aligned} f_k &= 2^{-|k|} \\ g_k &= k \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie

$$(f * g)_k = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_\ell g_{k-\ell}.$$

Hinweis: Spalten Sie die Summe in zwei Teilsummen über positive und negative ℓ auf. Führen Sie dann eine Substitution durch so dass beide Summen über $\ell = 1, \ldots, \infty$ laufen. Diese Summe können Sie dann vereinfachen und als geometrische Reihe darstellen.

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.