Heilbronn, den 5.5.2025 Prof. Dr. V. Stahl SS 25

Übungen zu Mathematik 3

Blatt 9

Zu bearbeiten bis 12.5.2025

Name:	**Matrikelnr.:**

Pflichtaufgabe. Vergleichen Sie Ihre Lösungen des letzten Aufgabenblatts mit den Musterlösungen.

- Geben Sie die Nummern der Aufgaben an, die Sie richtig bzw. nicht richtig gelöst haben.
- Schreiben Sie jede Aufgabe, die Sie nicht richtig gelöst haben, von der Musterlösung ab und geben Sie an wo Ihr Problem lag (z.B. Rechenfehler, Aufgabenstellung nicht verstanden, Wissenslücke im Stoff der Vorlesung, usw.).

Aufgabe 1. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Laplace Transformierte der Funktion

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie dann die Laplace Transformierte der Rechteck Schwingung

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \le t \le k+1 \text{ für } k = 0, 2, 4, 6, \dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Es gilt $f(t) - f(t-2) = g(t)$ für alle t.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Originalfunktion $f(t)$ der Laplace Transformierten

$$F(s) = \frac{4s + 3}{5s^2 + 6}.$$

Sie benötigen dafür *keine* Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 4. Sei n eine natürliche Zahl.

- Sei

$$f_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0, n, 2n, 3n, \dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist

$$f_k = \langle 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ Nullen}}, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ Nullen}}, 1, \dots \rangle$$

Berechnen Sie die z-Transformierte von f_k.

- Sei nun

$$g_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0 \\ k & \text{falls } k = 0, n, 2n, 3n, \dots \\ 3^k & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Berechnen Sie die z-Transformierte von g_k. Hinweise: Überlegen Sie sich, wie Sie f_k transformieren müssen um g_k zu erhalten und führen Sie die entsprechenden Schritte auf der z-Transformierten aus. Sie müssen das Ergebnis nicht auf einen Nenner bringen, formen Sie jedoch so um, dass keine negativen Exponenten von z auftreten.

Aufgabe 5. Sei

$$\begin{aligned} f_k &= \sigma_k a^k \\ g_k &= \sigma_k a^{-k}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $(f * g)_k$ indem Sie zuerst die Faltung im Zeitbereich durchführen und dann mit Hilfe der z-Transformation.

Aufgabe 6. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \sigma_k \cos(k).$$

Hinweis: Stellen Sie $\cos(k)$ mit komplexen e-Funktionen dar. Beginnen Sie mit der Korrespondenz

$$\sigma_k a^k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a}$$

und den Spezialfällen $a = e^{\pm j}$ und verwenden Sie Linearität.

Aufgabe 7. Sei $f(t) = 0$ für $t < 0$. In der Praxis wird die Abtastung von $f(t)$ mit einem Sample and Hold Verstärker gemacht. Hierbei entsteht ein Signal

$$g(t) = f(\lfloor t \rfloor)$$

wobei $\lfloor t \rfloor$ den Wert von t abgerundet auf die nächste ganze Zahl bedeutet. Somit ist $g(t)$ eine Stufenfunktion, d.h.

$$g(t) = \begin{cases} f_0 & \text{falls } 0 \le t < 1 \\ f_1 & \text{falls } 1 \le t < 2 \\ \vdots & \qquad \vdots \end{cases}$$

bzw.

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, r_k(t)$$

wobei

$$r_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \le t < k+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie die Laplace Transformierte von $g(t)$ in Abhängigkeit der Abtastwerte f_k.
- Sowohl $G(s)$ als auch $F(z)$ sind Laplace Transformierte von $f(t)$ nach einer Abtastung. Bei $G(s)$ wurde die Abtastung durch einen Sample and Hold Verstärker gemacht, bei $F(z)$ durch Multiplikation mit der Kammfunktion $p(t)$. Tatsächlich unterscheiden sich $G(s)$ und $F(z)$ nur um einen Faktor. Berechnen Sie diesen.
- Durch welche Operation im Zeitbereich unterscheiden sich folglich $f(t)p(t)$ und $g(t)$?

Aufgabe 8. Sei

$$\begin{aligned} f_k &= \sigma_k 2^k \\ g_k &= \sigma_k (-1)^k. \end{aligned}$$

Berechnen Sie

$$(f * g)_k.$$

Aufgabe 9. Seien $f(t), g(t)$ zwei T-periodische Funktionen mit gegebenen Fourier Koeffizienten $z_k^{(f)}$ und $z_k^{(g)}$. Berechnen Sie hieraus die Fourier Koeffizienten von $f(t)g(t)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis und zeigen Sie, dass hierbei eine diskrete Faltung auftritt.

Aufgabe 10. Sei S ein LTI System. Zeigen Sie, dass dann auch S' mit

$$S'(f) = S(f)_{\cdot -3}$$

ein LTI System ist.

Aufgabe 11. Ein Übertragungskanal mit Impulsantwort

$$g_k = \delta_k + a\delta_{k-1}$$

soll durch einen nachgeschalteten, rekursiven Filter mit Impulsantwort h_k kompensiert werden. Es soll also

$$(g * h)_k = \delta_k$$

gelten. Berechnen Sie h_k. Für welche Werte von a ist der Kompensator stabil? Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des Kompensators.

Aufgabe 12. Elektronische Musikinstrumente müssen Schwingungen mit beliebiger Frequenz ω erzeugen, d.h. Abtastwerte

$$g_k = \cos(\omega k \Delta t)$$

berechnen, wobei Δt das Abtastinterval ist. Nun ist die Berechnung der Cosinusfunktion sehr teuer und soll optimiert werden.

Die Idee ist, einen rekursiven Filter zu entwerfen (der ja nur Multiplikationen und Additionen erfordert), dessen Impulsantwort genau g_k ist. Man muss in diesen Filter dann nur noch δ_k eingeben und erhält am Ausgang die gewünschte Cosinus Schwingung.

Berechnen Sie die Koeffizienten dieses Filters und stellen Sie ihn als Blockschaltbild dar. Wie viele Multiplikationen und Additionen sind pro Abtastwert zur Berechnung der Impulsantwort dieses Filters erforderlich?

Ist der Filter stabil?

Hinweis: Berechnen Sie die z-Transformierte $G(z)$ von g_k. Stellen Sie diese als rationale Funktion in z^{-1} dar. Die Filterkoeffizienten müssen Sie dann nur noch ablesen.

Aufgabe 13. Für ein lineares, zeitinvariantes System gelte folgender Zusammenhang zwischen Eingabefolge f_k und Ausgabefolge h_k:

$$h_k + h_{k-1} \quad = \quad 2f_k + f_{k-1} - f_{k-2}.$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ und die Impulsantwort g_k des Systems. Sie dürfen davon ausgehen, dass f und h eine z-Transformierte haben. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Aufgabe 14. Gegeben sei ein lineares System, das eine Eingangsfolge f_k in eine Ausgangsfolge h_k transformiert nach der Formel

$$h_k = 2f_k + f_{k-1} + 3f_{k-2} + 2h_{k-1}.$$

- Sei $f_k = \delta_k$ der Dirac Impuls. Berechnen Sie h_k unter der Annahme, dass $h_k = 0$ für $k < 0$.
- Schreiben Sie die o.g. Formel so um, dass Sie sie kompakt mit Faltungen beschreiben können, d.h. finden Sie Folgen a_k und b_k so dass

$$(h * a)_k = (f * b)_k.$$

- Verwenden Sie den Faltungssatz der z-Transformation um die Übertragungsfunktion des Systems zu berechnen, d.h. finden Sie eine Funktion $G(z)$ so dass

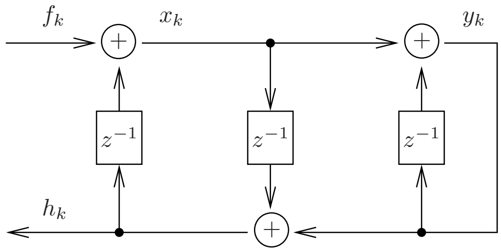
$$H(z) = F(z)G(z).$$

- Versuchen Sie, $G(z)$ in den Zeitbereich zurückzutransformieren. Probieren Sie's mit Polynomdivision und Partialbruchzerlegung und den Korrespondenzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \delta_{k-1} \\ \frac{1}{z-2} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad 2^{k-1}\sigma_{k-1} \\ 1 &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \delta_k. \end{aligned}$$

Es muss dabei die Impulsantwort des Systems herauskommen, d.h. die in der ersten Teilaufgabe berechnete Folge h_k, wenn die Eingabefolge der Dirac Impuls war.

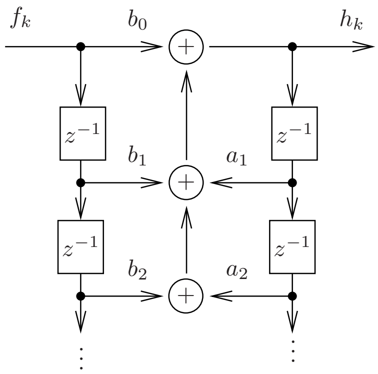
Aufgabe 15. Gegeben sei folgendes System, das eine Inputfolge f_k in eine Outputfolge h_k transformiert wobei $f_k = h_k = 0$ für $k < 0$.



- Stellen Sie Differenzengleichungen unter Verwendung der Hilfsgrößen x_k, y_k auf und berechnen Sie damit die ersten 5 Werte der Impulsantwort des Systems, indem Sie folgende Tabelle ausfüllen:

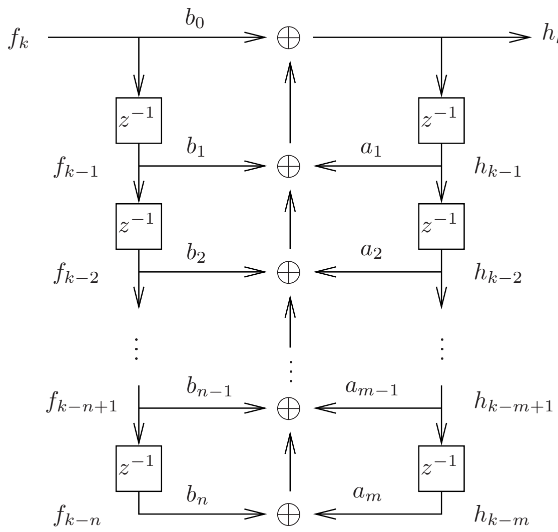
k	f_k	x_k	y_k	h_k
0	1	1	1	1
1	0	1	2	3
2	0			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems, indem Sie aus den Gleichungen im Bildbereich $X(z)$ und $Y(z)$ eliminieren.
- Berechnen Sie aus der Übertragungsfunktion die Koeffizienten a_k und b_k, so dass das System äquivalent ist zu folgendem Filter.



- Stellen Sie anhand dieses äquivalenten Systems eine Differenzengleichung auf und berechnen Sie damit die ersten 5 Werte der Impulsantwort. Das Ergebnis muss gleich sein wie die oben berechnete Impulsantwort.

Aufgabe 16. Ein rekursiver Filter mit n Verzögerungsgliedern im Vorwärtszweig und m im Rückwärtszweig hat folgende Struktur:



- Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Filters immer eine rationale Funktion in z ist, wobei der Zählergrad kleiner oder gleich dem Nennergrad ist.
- Unter welcher Bedingung ist der Zählergrad gleich dem Nennergrad?
- Da man keine Zeitmaschine bauen kann, ist intuitiv klar, dass der Filter kausal sein muss. Zeigen Sie, dass die inverse z-Transformierte g_k einer rationalen Funktion $G(z)$, deren Zählergrad kleinergleich ihrem Nennergrad ist, kausal ist. Hinweis: Partialbruchzerlegung.
- Unter welcher Bedingung ist der rekursiver Filter invertierbar, d.h. das inverse System mit Übertragungsfunktion $1/G(z)$ ebenfalls kausal?
- Falls das inverse System nicht kausal ist, kann man trotzdem einen kausalen, inversen Filter konstruieren, sofern man eine Verzögerung um u Takte akzeptiert. Berechnen Sie das kleinst mögliche u in Abhängigkeit der Filterkoeffizienten.

  Welche Verzögerung muss man folglich in der Akustik akzeptieren, wenn man durch einen Filter die Raumimpulsantwort herausrechnen möchte? Welche praktischen Probleme können trotzdem dabei entstehen?

Pflichtaufgabe. Fassen Sie die wichtigsten Vorlesungsinhalte seit der letzten Abgabe übersichtlich auf einer Seite zusammen. Verwenden Sie wenn möglich Bilder. Die Darstellung sollte so sein, dass Sie Ihnen später bei der Klausurvorbereitung hilft. Überlegen Sie sich, wie Sie den Stoff einer dritten Person erklären würden. Oft merkt man dabei, was man selber noch nicht verstanden hat.