Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 3

Studiengang: ASE	Semester: 3
Hilfsmittel: 5 DIN-A4 Seiten	Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Name:	**Matrikelnr.:**
Punkte:	Note:

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $f(t)$ eine T-periodische Funktion mit Fourier Koeffizienten z_k. Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten $\tilde{z}_k$ der Funktion

$$f(t)\sin^2(\omega t), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

$\tilde{z}_k \ =$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei

$$F(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } |\omega| > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Übertragungsfunktion eines Hochpass Filters mit cutoff Frequenz 1. Berechnen Sie die Impulsantwort $f(t)$ dieses Filters.

Hinweis: Die direkte Anwendung der Formel für die inverse Fourier Transformation funktioniert hier nicht, da im Zeitbereich eine Distribution entsteht. Sie müssen daher zunächst $F(\omega)$ in eine Summe von Funktionen zerlegen, deren Rücktransformation einfacher geht.

$f(t) \ =$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie $F(\omega)$ und stellen Sie das Ergebnis unter Verwendung der si-Funktion dar.
- Berechnen Sie dann mit Hilfe der inversen Fourier Transformation von $F(\omega)$

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt.$$

  Hinweis: Die si-Funktion ist nicht elementar integrierbar, d.h. die Stammfunktionen von $\mathrm{si}(t)$ lassen sich nicht mit den üblichen Funktionssymbolen darstellen.
- Leiten Sie hieraus

  $$\int_{0}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt$$

  her und begründen Sie Ihre Antwort.

$F(\omega) \ =$

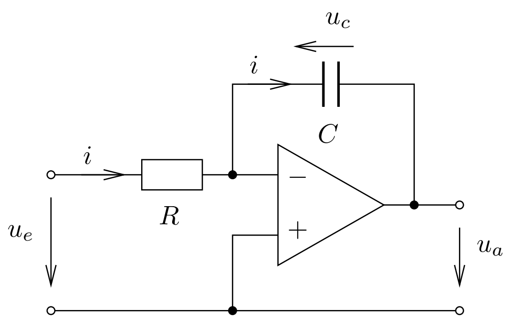
$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt \ =$

$\int_{0}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt \ =$

Begründung:

Aufgabe 4. (10 Punkte) Ein Operationsverstärker ist eine Schaltung mit einem invertierenden Eingang $-$, einem nicht invertierenden Eingang $+$ und einem Ausgang. Sie verstärkt die Differenzspannung zwischen $+$ und $-$ mit einem sehr hohen Faktor und leitet diese auf den Ausgang. Durch Rückkopplung des Ausgangs auf den invertierenden Eingang ist die Spannungsdifferenz zwischen $+$ und $-$ immer nahezu Null, d.h. die Eingänge liegen immer etwa auf dem gleichen Potential. Weiterhin sind die Eingänge sehr hochohmig, d.h. durch die Eingänge fließt fast kein Strom.

Die nachfolgende Schaltung heißt analoger Integrierer.



Aufgrund der o.g. Eigenschaften des Operationsverstärkers gilt hier

$$i(t) \quad = \quad \frac{u_e(t)}{R}$$

und

$$u_a(t) \quad = \quad u_C(t).$$

Zum Zeitpunkt $t = -\infty$ sei der Kondensator entladen. Berechnen Sie $u_a(t)$ in Abhängigkeit von $u_e(t)$. Berechnen Sie dann eine Funktion $G(s)$ so dass

$$U_a(s) \quad = \quad G(s)U_e(s).$$

$u_a(t) \;=$

$G(s) \;=$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Berechnen Sie die Lösung $f(t)$ der DGL

$$f'(t) + f(t) \quad = \quad 1 - \sigma(t-1)$$

mit Startwert $f(0^-) = 1$ für $t \geq 0$.

$f(t) \;=$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Ein rekursiver Filter habe die Impulsantwort

$$g_k \quad = \quad \sigma_k(-1)^k + 3\sigma_{k-1}2^{k-1} + \delta_k.$$

Zeichnen Sie das Blockschaltbild dieses Filters unter Verwendung von Addierern, Multiplizierern und Verzögerungsgliedern.

Aufgabe 7. (10 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1+j & -1+j \\ -j & 1-j \end{pmatrix}.$$

und stellen Sie diese in kartesischen Koordinaten dar.

Eigenwerte:

Aufgabe 8. (10 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und f eine Folge mit

$$f_k \quad = \quad \delta_{k+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i f_{k-i} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Folge f_k ist durch diese Gleichung nicht eindeutig definiert. Es gibt jedoch genau eine solche Folge f_k, die eine z-Transformierte $F(z)$ hat. Berechnen Sie dieses $F(z)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so, dass keine negativen Potenzen von z darin auftreten.

$F(z) \ =$

Aufgabe 9. (10 Punkte) Sei $u \in \mathbb{R}$ mit $u \neq -1$,

$$f_k \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } k \leq 0 \\ 1 & \text{falls } k = 1 \end{cases}$$

und

$$f_{k+2} \quad = \quad (1-u) f_{k+1} + u f_k \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

- Berechnen Sie die z-Transformierte $F(z)$ von f_k. Hinweis: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sigma_k f_{k+2} \quad = \quad \sigma_k (1-u) f_{k+1} + \sigma_k u f_k.$$

- Transformieren Sie $F(z)$ in den Zeitbereich zurück um einen geschlossenen Term für f_k zu erhalten.
- Für welche Werte von u hat die Folge f_k einen endlichen Grenzwert? Berechnen Sie diesen.

$F(z) \ =$

Geschlossener Term für f_k:

Grenzwert endlich für:

$\lim_{k \to \infty} f_k \ =$

Aufgabe 10. (10 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Berechnen Sie dann eine Basis für den Vektorraum der *reellen* Lösungsfunktionen des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Eigenwerte:

Eigenräume:

Basislösungen:

Aufgabe 11. (10 Punkte) Sei $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $0 \leq j \leq n$.

Für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sei

$$A_{\vec{x}} = (\vec{a}_1,\ \ldots,\ \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Spalte}}}{\vec{x}},\ \ldots,\ \vec{a}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die Matrix, die man aus A erhält wenn man deren j-te Spalte durch $\vec{x}$ ersetzt. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \det(A_{\vec{x}+\vec{y}}) &= \det(A_{\vec{x}}) + \det(A_{\vec{y}}) \\ \det(A_{u\vec{x}}) &= u \det(A_{\vec{x}}) \end{aligned}$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Entwickeln Sie die Determinanten nach der j-ten Spalte.