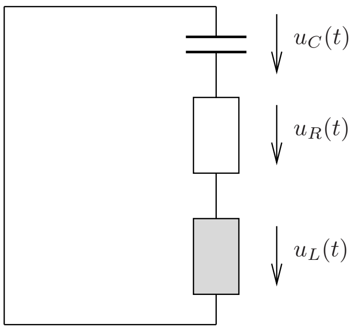
Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 3

Studiengang:	ASE	Semester:	3
Hilfsmittel:	5 DIN-A4 Seiten	Bearbeitungszeit:	120 Minuten
Name:		**Matrikelnr.:**	
Punkte:		Note:	

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (5 Punkte) Gegeben sei folgender Schwingkreis, der aus einem ohmschen Widerstand R, einer Spule L und einem Kondensator C besteht:



Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ sei

$$\begin{aligned} i(0) &= 0 \\ q(0) &= q_0 \end{aligned}$$

wobei $i(t)$ die Stromstärke und $q(t)$ die Ladung des Kondensators zum Zeitpunkt t ist.

Stellen Sie eine Formel für die Laplace Transformierte $I(s)$ der Stromstärke $i(t)$ auf.

Lösung von Aufgabe 1. Für die Ladung des Kondensators gilt

$$q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau)d\tau.$$

Für die Spannungen gilt

$$\begin{aligned} u_L(t) &= Li'(t) \\ u_C(t) &= \frac{1}{C}q(t) \\ &= \frac{q_0}{C} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \\ u_R(t) &= Ri(t) \end{aligned}$$

Die Summe der Spannungen muss Null sein, d.h.

$$\begin{aligned} u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) &= 0 \\ Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau &= -\frac{q_0}{C} \\ LCi'(t) + RCi(t) + \int_0^t i(\tau)d\tau &= -q_0. \end{aligned}$$

Für die Laplace Transformierte von $i(t)$ gilt

$$\begin{aligned} i(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ I(s) \\ i'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ sI(s) - i(0) = sI(s) \\ \int_0^t i(\tau)d\tau &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{I(s)}{s} \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} LCsI(s) + RCI(s) + \frac{I(s)}{s} &= -\frac{q_0}{s} \\ LCs^2I(s) + RCsI(s) + I(s) &= -q_0 \\ I(s)(LCs^2 + RCs + 1) &= -q_0 \\ I(s) &= -\frac{q_0}{LCs^2 + RCs + 1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (2 Punkte) Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \langle 0, 2, -3, 2,\ 0, 2, -3, 2, \ldots \rangle,$$

d.h.

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 2, \quad f_2 = -3, \quad f_3 = 2, \quad f_{k+4} = f_k \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so, dass keine negativen Exponenten von z auftreten.

Lösung von Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \\ &= 0z^{-0} + 2z^{-1} + (-3)z^{-2} + 2z^{-3} + \dots \\ &= (2z^{-1} - 3z^{-2} + 2z^{-3}) \underbrace{(1 + z^{-4} + z^{-8} + \dots)}_{S}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} S &= 1 + z^{-4} + z^{-8} + \dots \\ z^{-4}S &= z^{-4} + z^{-8} + \dots \\ S(1 - z^{-4}) &= 1 \\ S &= \frac{1}{1 - z^{-4}} \\ &= \frac{z^4}{z^4 - 1} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} F(z) &= 2z^{-1} - 3z^{-2} + 2z^{-3} \frac{z^4}{z^4 - 1} \\ &= \frac{2z^3 - 3z^2 + 2z}{z^4 - 1} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (2 Punkte) Sei f_k eine Folge mit z-Transformierter

$$F(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 + z^{-3}}.$$

Berechnen Sie durch Polynomdivision die Werte f_0, f_1, f_2, f_3, f_4.

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{array}{l} z^{-1} + z^{-2} \; : \; 1 + z^{-3} \quad = z^{-1} + z^{-2} - z^{-4} + \dots \\ \underline{z^{-1} + z^{-4}} \\ \qquad z^{-2} - z^{-4} \\ \qquad \underline{z^{-2} + z^{-5}} \\ \qquad\qquad -z^{-4} - z^{-5} \\ \qquad\qquad \dots \end{array}$$

Damit ist

$$f_k = \langle 0, 1, 1, 0, -1, \dots, \rangle$$

Aufgabe 4. (1 Punkte) Sei S ein System, das eine Folge f wie folgt transformiert:

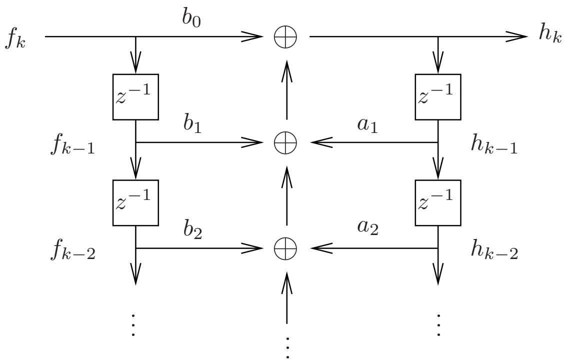
$$[S(f)]_k = \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i f_i.$$

Berechnen Sie die Impulsantwort $S(\delta)$ des Systems.

Lösung von Aufgabe 4.

$$
\begin{aligned}
[S(\delta)]_k &= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i \delta_i \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^0 \delta_i \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} \delta_i \\
&= \sigma_k.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5. (5 Punkte) Die Struktur eines rekursiven Filters ist wie folgt:



Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k so dass der Filter die Impulsantwort

$$g_k = \sigma_k \, k^2$$

hat. Hinweis:

$$\sigma_k \, k^2 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Lösung von Aufgabe 5. Für den Filter gilt allgemein

$$h_k = b_0 f_k + b_1 f_{k-1} + b_2 f_{k-1} \ldots + a_1 h_{k-1} + a_2 h_{k-2} + a_3 h_{k-3} + \ldots$$

Mit der z-Transformation folgt hieraus

$$
\begin{aligned}
&H(z)(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3} - \ldots) \\
&= F(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots)
\end{aligned}
$$

Die Übertragungsfunktion des Filters ist somit

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{H(z)}{F(z)} \\
&= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3} - \ldots}.
\end{aligned}
$$

Für die gegebene Impulsantwort g_k ist die die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
\sigma_k\, k^2 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet & \quad \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \\
= & \quad \frac{z^2+z}{z^3-3z^2+3z-1} \\
= & \quad \frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}} \\
= & \quad \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}-a_3z^{-3}-\ldots}.
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0 \\
b_1 &= 1 \\
b_2 &= 1 \\
a_1 &= 3 \\
a_2 &= -3 \\
a_3 &= 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. (7 Punkte) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= 2x_1(t) \\
x_2'(t) &= x_1(t)+x_2(t)+x_3(t) \\
x_3'(t) &= -x_1(t)+x_2(t)+x_3(t).
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 6. Das DGL System lässt sich in der Form

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

darstellen mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
A-\lambda E &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
\det(A-\lambda E) &= (2-\lambda)((1-\lambda)^2-1) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) \\
&= -\lambda(\lambda-2)^2
\end{aligned}$$

- Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 2$.

$$A-2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung von

$$(A-2E)\vec{v}=\vec{0}$$

ist

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1+v_2 \end{pmatrix}.$$

Zwei linear unabhängige Lösungen sind somit

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit hat man zwei Basislösungen

$$\vec{x}_1(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \vec{x}_2(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

- Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$. Lösung von

$$A\vec{v}=\vec{0}$$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ -v_2 \end{pmatrix}$$

Eine Lösung ist somit

$$\vec{v}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit hat man die Basislösung

$$\vec{x}_3(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$\vec{x}(t)=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}+c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. (7 Punkte) Berechnen Sie die Matrix e^{At} für

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 7. Für die Laplace Transformierte gilt

$$e^{At} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (sE-A)^{-1}.$$

$$\begin{aligned} sE-A &= \begin{pmatrix} s & 2 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \\ (sE-A)^{-1} &= \frac{1}{s(s-1)-2}\begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ -1 & s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Faktorisierung des Nenners:

$$s(s-1)-2 = s^2-s-2$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \\ &= \frac{1\pm 3}{2} \end{aligned}$$

$$s_1 = 2, \quad s_2 = -1.$$

Damit gilt

$$(sE-A)^{-1} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}\begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ -1 & s \end{pmatrix}.$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(s-2)(s+1)} = \frac{c_1}{s-2} + \frac{c_2}{s+1}$$

$$c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-2)(s+1)} &= \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{s}{(s-2)(s+1)} = \frac{c_1}{s-2} + \frac{c_2}{s+1}$$

$$c_1 = \frac{2}{3}, \quad c_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s-2)(s+1)} &= \frac{2}{3}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} \end{aligned}$$

Rücktransformation der Matrix

$$\begin{aligned}
\frac{s-1}{(s-2)(s+1)} &\;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}\\
&= \frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}\\
\frac{-2}{(s-2)(s+1)} &\;\bullet\!\!-\!\!\circ\; -\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}\\
\frac{-1}{(s-2)(s+1)} &\;\bullet\!\!-\!\!\circ\; -\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}\\
\frac{s}{(s-2)(s+1)} &\;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$e^{At} = \frac{1}{3}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}e^{-t}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8. (3 Punkte) Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 der Funktion

$$f(x,y) = \frac{\sin(y^2)}{x}$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x}=1$, $\hat{y}=0$.

Lösung von Aufgabe 8. Partielle Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) &= -\frac{\sin(y^2)}{x^2}\\
\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) &= \frac{2y\cos(y^2)}{x}\\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) &= -\frac{2y\cos(y^2)}{x^2}\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) &= \frac{2\sin(y^2)}{x^3}\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) &= \frac{2\cos(y^2)-4y^2\sin(y^2)}{x}
\end{aligned}$$

Auswertung bei $\hat{x},\hat{y}$

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial x}f(1,0) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial y}f(1,0) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(1,0) &= 0\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(1,0) &= 0\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(1,0) &= 2
\end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom

$$p(x,y) \quad = \quad y^2.$$