Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 3

Studiengang:	ASE	Semester:	3
Hilfsmittel:	5 DIN-A4 Seiten	Bearbeitungszeit:	120 Minuten
Name:		**Matrikelnr.:**	
Punkte:		Note:	

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Berechnen Sie die Laplace Transformierte von

$$f(t) = \sigma(t) t \sin(t+2).$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 1. Es gilt

$$\sin(t+2) = \frac{1}{2j}\left(e^{j(t+2)} - e^{-j(t+2)}\right).$$

Transformation der Summanden:

$$\begin{aligned}
e^{j(t+2)} &= e^{2j} e^{jt} \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{2j}\frac{1}{s-j} \\
e^{-j(t+2)} &= e^{-2j} e^{-jt} \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-2j}\frac{1}{s+j}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\sin(t+2) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2j}\left(e^{2j}\frac{1}{s-j} - e^{-2j}\frac{1}{s+j}\right) \\
&= \quad \frac{(\cos(2)+j\sin(2))(s+j)-(\cos(2)-j\sin(2))(s-j)}{2j(s^2+1)} \\
&= \quad \frac{\cos(2)(s+j-s+j)+j\sin(2)(s+j+s-j)}{2j(s^2+1)} \\
&= \quad \frac{2j\cos(2)+2sj\sin(2)}{2j(s^2+1)} \\
&= \quad \frac{\cos(2)+s\sin(2)}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Mit der Korrespondenz

$$tf(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -F'(s)$$

folgt

$$\begin{aligned}
f(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\left(\frac{\cos(2)+s\sin(2)}{s^2+1}\right)' \\
&= \quad -\frac{\sin(2)(s^2+1)-(\cos(2)+s\sin(2))2s}{(s^2+1)^2} \\
&= \quad -\frac{s^2\sin(2)+\sin(2)-2s\cos(2)-2s^2\sin(2)}{(s^2+1)^2} \\
&= \quad \frac{(s^2-1)\sin(2)+2s\cos(2)}{(s^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Berechnen Sie die inverse z-Transformierte f_k von

$$F(z) \quad = \quad \left(\frac{z}{z-1}\right)^2.$$

Lösung von Aufgabe 2. Aus der Tabelle entnimmt man

$$\frac{z}{z-1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_k.$$

Mit Hilfe des Faltungssatzes ist somit

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_k * \sigma_k \\
&= \quad \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sigma_\ell\sigma_{k-\ell} \\
&= \quad \sum_{\ell=0}^{\infty}\sigma_{k-\ell} \\
&= \quad \sigma_k\sum_{\ell=0}^{k}1 \\
&= \quad \sigma_k(k+1).
\end{aligned}$$

Ein anderer Lösungsweg ist die Multiplikation im Bildbereich durchzuführen.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 &= \frac{z^2}{z^2-2z+1} \\
&= 1+\frac{2z-1}{(z-1)^2} \\
&= 1+2\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^2}
\end{aligned}
$$

Aus der Tabelle entnimmt man

$$
\begin{aligned}
1 &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \delta_k \\
\frac{z}{(z-1)^2} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_k\, k \\
\frac{1}{(z-1)^2} &\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_{k-1}\,(k-1) \\
&\quad = \quad \sigma_k(k-1)+\delta_k.
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \delta_k+2\sigma_k\, k-\sigma_k(k-1)-\delta_k \\
&\quad = \quad \sigma_k(2k-k+1) \\
&\quad = \quad \sigma_k(k+1).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Beweisen Sie die Linearität der z-Transformation. Schreiben Sie zunächst auf, was zu zeigen ist und verwenden Sie im Beweis nur elementare Rechengesetze der Arithmetik.

Lösung von Aufgabe 3. Zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
f_k+g_k &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z)+G(z) \\
uf_k &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad uF(z)
\end{aligned}
$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
f_k+g_k &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_{k=0}^{\infty}(f_k+g_k)z^{-k} \\
&\quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}+g_k z^{-k} \\
&\quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k} \\
&\quad = \quad F(z)+G(z) \\
uf_k &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_{k=0}^{\infty} uf_k z^{-k} \\
&\quad = \quad u\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \\
&\quad = \quad uF(z)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4. (10 Punkte) Sei

$$f_k \quad = \quad \sigma_k 3^k.$$

Berechnen Sie eine Folge g_k so dass

$$(f * g)_k \quad = \quad \sigma_k 4^k.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 4. Aus

$$\begin{aligned} \sigma_k 3^k \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-3} \\ \sigma_k 4^k \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-4} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{z}{z-3} G(z) \quad &= \quad \frac{z}{z-4} \\ G(z) \quad &= \quad \frac{z}{z-4} \frac{z-3}{z} \\ &= \quad \frac{z-3}{z-4} \\ &= \quad 1 + \frac{1}{z-4}. \end{aligned}$$

Rücktransformation.

$$\begin{aligned} 1 \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \delta_k \\ \frac{z}{z-4} \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_k 4^k \\ \frac{1}{z-4} \quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_{k-1} 4^{k-1} \\ &= \quad \frac{1}{4}(4^k - \delta_k) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} g_k \quad &= \quad \delta_k + \frac{1}{4}(4^k - \delta_k) \\ &= \quad \frac{4\delta_k + 4^k - \delta_k}{4} \\ &= \quad \frac{3\delta_k + 4^k}{4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Berechnen Sie die Lösung des DGL Systems

$$\begin{aligned} x_1'(t) \quad &= \quad x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) \quad &= \quad x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1.$$

Lösung von Aufgabe 5. Vektorielle Notation

$$\vec{x}' \quad = \quad A\vec{x}$$

mit

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Laplace Transformation

$$\begin{aligned} s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) &= A\vec{X}(s) \\ (sE - A)\vec{X}(s) &= \vec{x}(0) \\ \vec{X}(s) &= (sE - A)^{-1}\vec{x}(0). \end{aligned}$$

Matrix Inversion.

$$\begin{aligned} (sE - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} s-1 & -3 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1)-3} \begin{pmatrix} s+1 & 3 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2-4} \begin{pmatrix} s+1 & 3 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lösung im Bildbereich und Rücktransformation.

$$\begin{aligned} (sE - A)^{-1}\vec{x}(0) &= \frac{1}{s^2-4} \begin{pmatrix} s-2 \\ -s+2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2-4}(s-2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s+2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Diagonalisierung von A^{-1}, d.h. eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D so dass

$$T^{-1}A^{-1}T \quad = \quad D.$$

Lösung von Aufgabe 6. Eigenwerte von A.

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ \det(A - \lambda E) &= -\lambda(-\lambda(1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (\lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (\lambda^2 - 1)(1-\lambda) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = y$, die zweite und dritte Gleichung sind linear von der ersten abhängig.

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $z = 0$. Aus der ersten Gleichung folgt $y = -x$, die zweite hängt linear von der ersten ab.

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Damit hat man drei linear unabhängige Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt somit

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}(1,1,-1).$$

Invertiert man beide Seiten, erhält man

$$\begin{aligned} (T^{-1}AT)^{-1} &= \mathrm{diag}(1,1,-1)^{-1} \\ T^{-1}A^{-1}T &= \mathrm{diag}(1,1,-1). \end{aligned}$$

Die Matrix T, die A diagonalisiert, diagonalisiert somit auch A^{-1}.

Aufgabe 7. (10 Punkte) Sei

$$f(x,y) = \frac{e^{x-y}}{x+y} \text{ und } \hat{x}=3, \quad \hat{y}=-2.$$

- Berechnen Sie die Steigung von f im Punkt $(\hat{x},\hat{y})$ in Richtung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Tangentialebene an f im Punkt $(\hat{x},\hat{y})$.

Lösung von Aufgabe 7. Gradient.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \frac{e^{x-y}(x+y) - e^{x-y}}{(x+y)^2} \\ &= e^{x-y}\frac{x+y-1}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= \frac{-e^{x-y}(x+y) - e^{x-y}}{(x+y)^2} \\ &= -e^{x-y}\frac{x+y+1}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x},\hat{y}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(\hat{x},\hat{y}) &= -2e^5 \\ \nabla f(\hat{x},\hat{y}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Richtungssteigung.

$$\nabla f(\hat{x},\hat{y}) \circ \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = -\frac{6e^5}{5}.$$

Tangentialebene.

$$\begin{aligned} \ell(x,y) &= f(\hat{x},\hat{y}) + \nabla f(\hat{x},\hat{y}) \circ \begin{pmatrix} x-\hat{x} \\ y-\hat{y} \end{pmatrix} \\ &= e^5 - 2e^5(y+2) \\ &= e^5(1-2y-4) \\ &= -e^5(2y+3). \end{aligned}$$

Aufgabe 8. Sei S ein System, das eine Folge f wie folgt transformiert:

$$[S(f)]_k = \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i f_i.$$

Ist das System linear? Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 8. Das System ist linear.

$$\begin{aligned}
[S(f+g)]_k &= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i (f+g)_i \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i (f_i + g_i) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i f_i + 3^i g_i \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i f_i + \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i g_i \\
&= [S(f)]_k + [S(g)]_k \\
&= [S(f) + S(g)]_k \\
[S(af)]_k &= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i (af)_i \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i a(f_i) \\
&= a \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i f_i \\
&= a[S(f)]_k.
\end{aligned}$$