Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 3

Studiengang:	ASE/IIT	Semester:	3
Hilfsmittel:	5 DIN-A4 Seiten	Bearbeitungszeit:	120 Minuten
Name:		**Matrikelnr.:**	
Punkte:		Note:	

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s).$$

Berechnen Sie hiermit die Laplace Transformierte von $f(t-1)\cos(t)$.

Lösung von Aufgabe 1. Umformen ergibt

$$\begin{aligned} f(t-1)\cos(t) &= \frac{1}{2} f(t-1)\left(e^{jt}+e^{-jt}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(t-1)e^{jt}+f(t-1)e^{-jt}\right). \end{aligned}$$

Mit den Korrespondenzen

$$\begin{aligned} f(t-\hat{t}) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-s\hat{t}}F(s) \\ f(t)e^{-at} &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s+a) \end{aligned}$$

gilt für $\hat{t}=1$ und $a=\pm j$

$$\begin{aligned} f(t-1) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-s}F(s) \\ f(t-1)e^{jt} &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-(s-j)}F(s-j) = e^{-s+j}F(s-j) \\ f(t-1)e^{-jt} &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-(s+j)}F(s+j) = e^{-s-j}F(s+j) \end{aligned}$$

Mit Linearität erhält man

$$\begin{aligned} f(t-1)\cos(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\left(e^{-s+j}F(s-j)+e^{-s-j}F(s+j)\right) \\ &= \frac{e^{-s}}{2}\left(e^{j}F(s-j)+e^{-j}F(s+j)\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Berechnen Sie die Lösung $f(t)$ der folgenden Gleichung, die eine Laplace Transformierte hat.

$$f'(t) + \int_{-\infty}^{t} f(u)du \quad = \quad \sigma(t-1).$$

Lösung von Aufgabe 2. Sei

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f'(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) \\ \int_{-\infty}^{t} f(u)du \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}F(s). \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \sigma(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s} \\ \sigma(t-1) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}e^{-s}. \end{aligned}$$

Damit ist die DGL im Bildbereich

$$\begin{aligned} sF(s) + \frac{1}{s}F(s) \quad &= \quad \frac{1}{s}e^{-s} \\ F(s)\left(s + \frac{1}{s}\right) \quad &= \quad \frac{1}{s}e^{-s} \\ F(s)(s^2+1) \quad &= \quad e^{-s} \\ F(s) \quad &= \quad \frac{1}{s^2+1}e^{-s}. \end{aligned}$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\frac{1}{s^2+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)\sin(t).$$

Mit dem Verschiebungssatz gilt

$$\frac{1}{s^2+1}e^{-s} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t-1)\sin(t-1).$$

Damit ist

$$f(t) \quad = \quad \sigma(t-1)\sin(t-1).$$

Probe durch Einsetzen.

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \delta(t-1)\sin(t-1) + \sigma(t-1)\cos(t-1) \\
&= \sigma(t-1)\cos(t-1) \\
\int_{-\infty}^{t} f(u)du &= \int_{-\infty}^{t} \sigma(u-1)\sin(u-1)du \\
&= \sigma(t-1)\int_{1}^{t} \sin(u-1)du \\
&= \sigma(t-1)\left[-\cos(u-1)\right]_1^t \\
&= \sigma(t-1)(-\cos(t-1)+1) \\
&= -\sigma(t-1)\cos(t-1) + \sigma(t-1) \\
f(t) + \int_{-\infty}^{t} f(u)du &= \sigma(t-1)\cos(t-1) - \sigma(t-1)\cos(t-1) + \sigma(t-1) \\
&= \sigma(t-1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. (10 Punkte) In einem System bestehe folgender Zusammenhang zwischen Eingangsfunktion $f(t)$ und Ausgangsfunktion $h(t)$:

$$h(t) + h''(t) = f'(t-1).$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ und die Impulsantwort $g(t)$ dieses Systems. Sie dürfen davon ausgehen, dass die Laplace Transformierte von f und h existiert.

Lösung von Aufgabe 3. Sei

$$\begin{aligned}
f(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s) \\
h(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; H(s).
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
f'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; sF(s) \\
f'(t-1) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-s}sF(s) \\
h''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2H(s)
\end{aligned}$$

Im Bildbereich gilt somit

$$\begin{aligned}
H(s) + s^sH(s) &= e^{-s}sF(s) \\
H(s)(s^2+1) &= e^{-s}sF(s) \\
H(s) &= e^{-s}\frac{s}{s^2+1}F(s).
\end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = \frac{s}{s^2+1}e^{-s}$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\frac{s}{s^2+1} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \sigma(t)\cos(t).$$

Mit dem Verschiebungssatz gilt

$$\frac{s}{s^2+1}e^{-s} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t-1)\cos(t-1).$$

Die Impulsantwort ist daher

$$g(t) = \sigma(t-1)\cos(t-1).$$

Probe: Sei $f(t) = \delta(t)$. Dann erhält man auf der rechten Seite der Gleichung

$$f'(t-1) = \delta'(t-1).$$

Für $h(t) = g(t)$ gilt

$$\begin{aligned} h'(t) &= \delta(t-1)\cos(t-1) - \sigma(t-1)\sin(t-1) \\ &= \delta(t-1) - \sigma(t-1)\sin(t-1) \\ h''(t) &= \delta'(t-1) - \delta(t-1)\sin(t-1) - \sigma(t-1)\cos(t-1) \\ &= \delta'(t-1) - \sigma(t-1)\cos(t-1) \end{aligned}$$

Auf der linken Seite der Gleichung erhält man damit

$$\begin{aligned} h(t) + h''(t) &= \sigma(t-1)\cos(t-1) + \delta'(t-1) - \sigma(t-1)\cos(t-1) \\ &= \delta'(t-1), \end{aligned}$$

d.h. die Gleichung ist erfüllt.

Aufgabe 4. (10 Punkte) Berechnen Sie die inverse z-Transformierte von

$$F(z) = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{z^{-1}+z^{-2}}.$$

Lösung von Aufgabe 4. Erweitern mit z^2 und Polynomdivision ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{z^{-1}+z^{-2}} &= \frac{z^2+z+1}{z+1} \\ &= z + \frac{1}{z+1} \\ &= z + z^{-1}\frac{z}{z+1}. \end{aligned}$$

Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\sigma_k a^k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a}$$

Daraus folgt mit $a = -1$

$$\frac{z}{z+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_k(-1)^k.$$

Mit dem Verschiebungssatz folgt

$$z^{-1}\frac{z}{z+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad \sigma_{k-1}(-1)^{k-1}$$

Mit

$$1 \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad \delta_k$$

und dem Verschiebungssatz folgt

$$z \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad \delta_{k+1}.$$

Damit erhält man insgesamt

$$f_k \quad = \quad \delta_{k+1} + \sigma_{k-1}(-1)^{k-1} \quad = \quad \delta_k + \sigma_{k+1}(-1)^{k+1}.$$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Ein linearer, zeitinvarianter Übertragungskanal mit Impulsantwort

$$f_k \quad = \quad \sigma_k\, ka^k$$

soll durch ein nachgeschaltetes System mit Impulsantwort g_k kompensiert werden. Hierbei wird ein Takt Verzögerung in Kauf genommen, d.h. es gilt

$$(f * g)_k \quad = \quad \delta_{k-1}$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ und die Impulsantwort g_k.

Lösung von Aufgabe 5. Im Bildbereich muss gelten

$$\begin{aligned} F(z)G(z) &= z^{-1} \\ G(z) &= z^{-1}\frac{1}{F(z)}. \end{aligned}$$

Berechnung von $F(z)$.

$$\begin{aligned} \sigma_k a^k \quad &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a} \\ \sigma_k ka^k \quad &\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad -z\left(\frac{z}{z-a}\right)' \\ &= \quad -z\frac{z-a-z}{(z-a)^2} \\ &= \quad \frac{az}{(z-a)^2} \\ &= \quad F(z). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
G(z) &= z^{-1}\frac{1}{F(z)} \\
&= \frac{(z-a)^2}{az^2} \\
&= \frac{z^2-2az+a^2}{az^2} \\
&= \frac{1}{a}-\frac{2}{z}+\frac{a}{z^2} \\
g_k &= \frac{1}{a}\delta_k - 2\delta_{k-1} + a\delta_{k-2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Sei S ein diskretes System mit

$$[S(f)]_k = f_{k+1} + 2f_k + 3f_{k-1}.$$

Ist S linear, zeitinvariant, kausal, stabil? Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ dieses Systems.

Lösung von Aufgabe 6. Es gilt

$$S(f) = f * (\delta_{\cdot+1} + 2\delta + 3\delta_{\cdot-1}).$$

Das System lässt sich somit durch eine Faltung mit Impulsantwort

$$[S(\delta)]_k = \delta_{k+1} + 2\delta_k + 3\delta_{k-1}$$

realisieren und ist daher linear und zeitinvariant. Da die Impulsantwort für negative k nicht verschwindet, ist das System aber nicht kausal. Für jedes begrenzte Eingangssignal ist das Ausgangssignal ebenfalls begrenzt, daher ist das System stabil. Die Übertragungsfunktion erhält man als z-Transformierte der Impulsantwort.

$$G(z) = z + 2 + 3z^{-1}.$$

Aufgabe 7. (10 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von A. Nennen Sie zu jedem Eigenwert seine geometrische und seine algebraische Vielfachheit.

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{aligned}
A - \lambda E &= \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
\det(A - \lambda E) &= (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) \\
&= (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3).
\end{aligned}$$

Damit ist eine Nullstelle $\lambda_1 = 3$. Die Nullstellen von $\lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2.$$

Damit hat man zwei Eigenwerte

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 3 \text{ mit algebraischer Vielfachheit } 2 \\
\lambda_2 &= -1 \text{ mit algebraischer Vielfachheit } 1.
\end{aligned}$$

- Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 3$.

  $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Alle Gleichungen sind skalares Vielfaches der ersten Gleichung, so dass nur

  $$2y - z = 0$$

  gelöst werden muss. Damit sind x, y beliebig und $z = 2y$. Der Eigenraum ist daher

  $$E_3 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C}\right\}$$

  und hat geometrische Vielfachheit 2.
- Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$.

  $$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Die dritte Gleichung ist skalares Vielfaches der zweiten und kann weggelassen werden. Aus der zweiten Gleichung folgt

  $$\begin{aligned}
  2y + z &= 0 \\
  z &= -2y.
  \end{aligned}$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 2y &= 0 \\ x + y &= 0 \\ x &= -y. \end{aligned}$$

Damit ist der Eigenraum

$$E_{-1} = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{C} \right\}$$

mit geometrischer Vielfachheit 1.

Aufgabe 8. (10 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix mit zwei Eigenwerten

$$\lambda_1 = 3 \text{ und } \lambda_2 = 5.$$

Die Eigenräume sind

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\} \\ E_5 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie hiermit die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Lösung von Aufgabe 8.

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + c_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9. (10 Punkte) Berechnen Sie die Matrix e^{At} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie dann das Anfangswertproblem

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \quad \text{mit} \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 9.

$$
\begin{aligned}
sE - A &= \begin{pmatrix} s-1 & 4 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix} \\
(sE-A)^{-1} &= \frac{1}{(s-1)(s+3)+4} \begin{pmatrix} s+3 & -4 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2+2s+1} \begin{pmatrix} s+3 & -4 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} s+3 & -4 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Rücktransformation. Aus der Formelsammlung entnimmt man

$$\underbrace{\frac{1}{(s+1)^2}}_{F(s)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)\underbrace{te^{-t}}_{f(t)}.$$

Mit der Korrespondenz

$$\sigma(t)f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) - f(0^-)$$

und $f(0^-) = 0$ folgt

$$\frac{s}{(s+1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t)\left(e^{-t} - te^{-t}\right).$$

Mit Linearität folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{s+3}{(s+1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad & \sigma(t)\left(e^{-t} - te^{-t} + 3te^{-t}\right) &= \ & \sigma(t)\left(e^{-t} + 2te^{-t}\right) \\
\frac{-4}{(s+1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad & -4\sigma(t)te^{-t} \\
\frac{s-1}{(s+1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad & \sigma(t)\left(e^{-t} - te^{-t} - te^{-t}\right) &= \ & \sigma(t)\left(e^{-t} - 2te^{-t}\right).
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \sigma(t)\begin{pmatrix} e^{-t} + 2te^{-t} & -4te^{-t} \\ te^{-t} & e^{-t} - 2te^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \sigma(t)e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sigma(t)te^{-t}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$
\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= e^{At}\vec{x}(0) \\
&= \sigma(t)e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma(t)te^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$