Heilbronn, den - Prof. Dr. V. Stahl

Leistungsnachweis
Mathematik 3

Studiengang:	ASE	Semester:	3
Hilfsmittel:	5 DIN-A4 Seiten	Bearbeitungszeit:	120 Minuten
Name:		**Matrikelnr.:**	
Punkte:		Note:	

- Es werden nur leserliche Klausuren bewertet.
- Vereinfachen Sie Ihre Lösungen so weit wie möglich.
- Übertragen Sie Ihre Lösungen am Ende der Prüfungszeit in die Kästen auf dem Aufgabenblatt. Nur diese werden bewertet.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Sei $f(t)$ eine T-periodische Funktion mit Fourier Koeffizienten z_k. Berechnen Sie die Fourier Koeffizienten $\tilde{z}_k$ der Funktion

$$f(t)\sin^2(\omega t), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Lösung von Aufgabe 1. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin^2(\omega t) &= \left(\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{2j\omega t} + e^{-2j\omega t} - 2\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{2j\omega t} + e^{-2j\omega t}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin^2(\omega t)e^{-jk\omega t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{2j\omega t} + e^{-2j\omega t}\right)\right)e^{-jk\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega t}dt - \frac{1}{4T}\int_0^T f(t)\left(e^{2j\omega t} + e^{-2j\omega t}\right)e^{-jk\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2}z_k - \frac{1}{4T}\int_0^T f(t)e^{-j(k-2)\omega t}dt + \int_0^T f(t)e^{-j(k+2)\omega t} \\
&= \frac{1}{2}z_k - \frac{1}{4}(z_{k-2} + z_{k+2}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei

$$F(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } |\omega| > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Übertragungsfunktion eines Hochpass Filters mit cutoff Frequenz 1. Berechnen Sie die Impulsantwort $f(t)$ dieses Filters.

Hinweis: Die direkte Anwendung der Formel für die inverse Fourier Transformation funktioniert hier nicht, da im Zeitbereich eine Distribution entsteht. Sie müssen daher zunächst $F(\omega)$ in eine Summe von Funktionen zerlegen, deren Rücktransformation einfacher geht.

Lösung von Aufgabe 2. Sei

$$G(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } |\omega| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$F(\omega) \quad = \quad 1 - G(\omega).$$

Rücktransformation von $G(\omega)$.

$$\begin{aligned} g(t) \quad &= \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \quad \frac{1}{2\pi j t} \left[e^{j\omega t} \right]_{-1}^{1} \qquad\qquad \text{falls } t \neq 0 \\ &= \quad \frac{1}{2\pi j t} \left(e^{jt} - e^{-jt} \right) \\ &= \quad \frac{1}{\pi t} \sin(t) \\ &= \quad \frac{1}{\pi} \mathrm{si}(t). \end{aligned}$$

Für $t = 0$ erhält man

$$g(t) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} e^{0} d\omega \quad = \quad \frac{1}{\pi} \quad = \quad \frac{1}{\pi} \mathrm{si}(0).$$

Damit ist

$$g(t) \quad = \quad \frac{1}{\pi} \mathrm{si}(t) \text{ für alle } t.$$

Rücktransformation von $F(\omega)$.

$$\begin{aligned} F(\omega) \quad &= \quad 1 - G(\omega) \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \delta(t) - \frac{1}{\pi} \mathrm{si}(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie $F(\omega)$ und stellen Sie das Ergebnis unter Verwendung der si-Funktion dar.
- Berechnen Sie dann mit Hilfe der inversen Fourier Transformation von $F(\omega)$

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt.$$

  Hinweis: Die si-Funktion ist nicht elementar integrierbar, d.h. die Stammfunktionen von $\mathrm{si}(t)$ lassen sich nicht mit den üblichen Funktionssymbolen darstellen.
- Leiten Sie hieraus

  $$\int_{0}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt$$

  her und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 3.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}dt \\ &= -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-1}^{1} \qquad \text{für } \omega \neq 0 \\ &= -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{j\omega} 2j\sin(\omega) \\ &= 2\frac{\sin(\omega)}{\omega} \\ &= 2\mathrm{si}(\omega). \end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ gilt

$$F(0) \quad = \quad \int_{-1}^{1} e^{-j0t}dt \quad = \quad 2 \quad = \quad 2\mathrm{si}(0).$$

Damit ist

$$F(\omega) \quad = \quad 2\mathrm{si}(\omega) \qquad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

Inverse Fourier Transformation ergibt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\mathrm{si}(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad = \quad f(t).$$

Für $t = 0$ erhält man hieraus

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(\omega)d\omega \quad = \quad 1.$$

Da es sich um ein bestimmtes Integral handelt, kann man ω durch t ersetzen und erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt \quad = \quad \pi.$$

Da die si-Funktion gerade ist, d.h. für $t \neq 0$

$$\mathrm{si}(-t) \quad = \quad \frac{\sin(-t)}{-t} \quad = \quad \frac{-\sin(t)}{-t} \quad = \quad \frac{\sin(t)}{t} \quad = \quad \mathrm{si}(t),$$

folgt durch Substition (oder einfach aus Symmetriegründen)

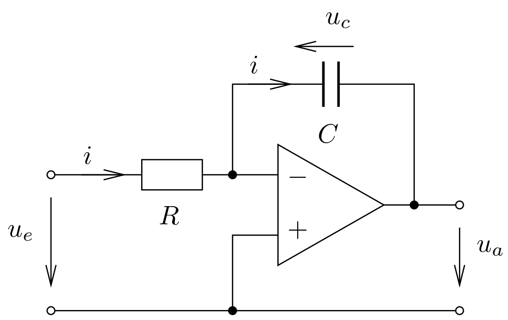
$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{si}(t)dt \quad = \quad \int_{-\infty}^{0} \mathrm{si}(-t)dt \quad = \quad -\int_{\infty}^{0} \mathrm{si}(t)dt \quad = \quad \int_{0}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{si}(t)dt \\
&= \pi - \int_{0}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt \\
2\int_{0}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt &= \pi \\
\int_{0}^{\infty} \mathrm{si}(t)dt &= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. (10 Punkte) Ein Operationsverstärker ist eine Schaltung mit einem invertierenden Eingang $-$, einem nicht invertierenden Eingang $+$ und einem Ausgang. Sie verstärkt die Differenzspannung zwischen $+$ und $-$ mit einem sehr hohen Faktor und leitet diese auf den Ausgang. Durch Rückkopplung des Ausgangs auf den invertierenden Eingang ist die Spannungsdifferenz zwischen $+$ und $-$ immer nahezu Null, d.h. die Eingänge liegen immer etwa auf dem gleichen Potential. Weiterhin sind die Eingänge sehr hochohmig, d.h. durch die Eingänge fließt fast kein Strom.

Die nachfolgende Schaltung heißt analoger Integrierer.



Aufgrund der o.g. Eigenschaften des Operationsverstärkers gilt hier

$$i(t) \quad = \quad \frac{u_e(t)}{R}$$

und

$$u_a(t) \quad = \quad u_C(t).$$

Zum Zeitpunkt $t = -\infty$ sei der Kondensator entladen. Berechnen Sie $u_a(t)$ in Abhängigkeit von $u_e(t)$. Berechnen Sie dann eine Funktion $G(s)$ so dass

$$U_a(s) \quad = \quad G(s)U_e(s).$$

Lösung von Aufgabe 4. Es gilt

$$q'(t) \quad = \quad -i(t) \quad = \quad -\frac{u_e(t)}{R}.$$

Damit ist $q(t)$ eine Stammfunktion von $-u_e(t)/R$. Da $q(-\infty) = 0$ folgt

$$q(t) \quad = \quad -\frac{1}{R}\int_{-\infty}^{t} u_e(\tau)d\tau.$$

Da

$$u_a(t) \quad = \quad u_c(t) \quad = \quad \frac{q(t)}{C}$$

folgt

$$\begin{aligned} u_a(t) &= -\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} u_e(\tau)d\tau \\ &= -\frac{1}{RC}(\sigma * u_e)(t). \end{aligned}$$

Da das System durch Faltung mit der Funktion

$$g(t) = -\frac{1}{RC}\sigma(t)$$

realisiert werden kann, ist es linear und zeitinvariant. Mit dem Faltungssatz folgt im Bildbereich

$$U_a(s) = -\frac{1}{RCs}U_e(s).$$

Damit ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = -\frac{1}{RCs}.$$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Berechnen Sie die Lösung $f(t)$ der DGL

$$f'(t) + f(t) = 1 - \sigma(t-1)$$

mit Startwert $f(0^-) = 1$ für $t \geq 0$.

Lösung von Aufgabe 5. Da nur die Lösung für $t \geq 0$ gesucht ist, kann man beide Seiten mit $\sigma(t)$ multiplizieren und erhält

$$\begin{aligned} \sigma(t)f'(t) + \sigma(t)f(t) &= \sigma(t) - \sigma(t)\sigma(t-1) \\ &= \sigma(t) - \sigma(t-1). \end{aligned}$$

Laplace Transformierte der rechten Seite.

$$\sigma(t) - \sigma(t-1) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s}.$$

Sei

$$\sigma(t)f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s).$$

Dann ist

$$\sigma(t)f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - 1.$$

Damit ist die DGL im Bildbereich

$$\begin{aligned} sF(s) - 1 + F(s) &= \frac{1-e^{-s}}{s} \\ F(s)(s+1) &= \frac{1-e^{-s}}{s} + 1 = \frac{s+1-e^{-s}}{s} \\ F(s) &= \frac{s+1-e^{-s}}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s(s+1)}. \end{aligned}$$

Rücktransformation mit Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(s+1)} &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} \\
1 &= c_1(s+1) + c_2 s.
\end{aligned}$$

Spezialfall $s = 0$ ergibt $c_1 = 1$. Spezialfall $s = -1$ ergibt $c_2 = -1$.

Damit ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(s+1)} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \\
\bullet\!\!-\!\!\circ\ \sigma(t) - \sigma(t)e^{-t} &= \sigma(t)(1 - e^{-t}).
\end{aligned}$$

Mit dem Verschiebungssatz erhält man

$$e^{-s}\frac{1}{s(s+1)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t-1)(1 - e^{1-t}).$$

Insgesamt ist somit

$$F(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sigma(t) - \sigma(t-1)(1 - e^{1-t}).$$

Folglich ist für $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
f(t) &= 1 + \sigma(t-1)(e^{1-t} - 1) \\
&= \sigma(1-t) + \sigma(t-1)e^{1-t}.
\end{aligned}$$

Ein schnellerer Rechenweg wäre wie folgt gewesen. Zuerst transformiert man $sF(s)$ zurück.

$$sF(s) \quad = \quad 1 - e^{-s}\frac{1}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \delta(t) - \sigma(t-1)e^{1-t}.$$

Die Multiplikation mit $1/s$, die man im Bildbereich benötigt um $F(s)$ zu erhalten, entspricht einer Faltung mit $\sigma(t)$ im Zeitbereich. Damit ist

$$\begin{aligned}
F(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad & \int_{-\infty}^{t} \big(\delta(\tau) - \sigma(\tau-1)e^{1-\tau}\big)d\tau \\
= \quad & \sigma(t) - \sigma(t-1)\int_{1}^{t} e^{1-\tau}d\tau \\
= \quad & \sigma(t) + \sigma(t-1)\left[e^{1-\tau}\right]_1^t \\
= \quad & \sigma(t) + \sigma(t-1)\big(e^{1-t} - 1\big)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Ein rekursiver Filter habe die Impulsantwort

$$g_k \quad = \quad \sigma_k(-1)^k + 3\sigma_{k-1}2^{k-1} + \delta_k.$$

Zeichnen Sie das Blockschaltbild dieses Filters unter Verwendung von Addierern, Multiplizierern und Verzögerungsgliedern.

Lösung von Aufgabe 6. Aus

$$\sigma_k a^k \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a}$$

folgt

$$\begin{aligned} \sigma_k(-1)^k &\quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z+1} \\ \sigma_k 2^k &\quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-2}. \end{aligned}$$

Mit dem Verschiebungssatz erhält man

$$\sigma_{k-1}2^{k-1} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{z-2}.$$

Damit ist

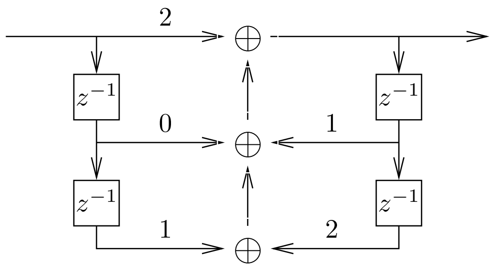
$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z}{z+1} + \frac{3}{z-2} + 1 \\ &= \frac{z(z-2) + 3(z+1) + (z+1)(z-2)}{(z+1)(z-2)} \\ &= \frac{z^2 - 2z + 3z + 3 + z^2 - z - 2}{z^2 - z - 2} \\ &= \frac{2z^2 + 1}{z^2 - z - 2} \\ &= \frac{2 + z^{-2}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}}. \end{aligned}$$

Die Gewichte im Vorwärtszweig sind

$$b_0 = 2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1.$$

Die Gewichte im Rückwärtszweig sind

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2.$$



Aufgabe 7. (10 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1+j & -1+j \\ -j & 1-j \end{pmatrix}.$$

und stellen Sie diese in kartesischen Koordinaten dar.

Lösung von Aufgabe 7.

$$\begin{array}{rcl}
A - \lambda E & = & \begin{pmatrix} 1+j-\lambda & -1+j \\ -j & 1-j-\lambda \end{pmatrix} \\
\det(A-\lambda E) & = & (1+j-\lambda)(1-j-\lambda) - (-1+j)(-j) \\
& = & \lambda^2 - \lambda(1+j+1-j) + (1+j)(1-j) - j(1-j) \\
& = & \lambda^2 - 2\lambda + 1 - j.
\end{array}$$

Nullstellen:

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_{1,2} & = & \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4(1-j)}}{2} \\
& = & \dfrac{2 \pm \sqrt{4j}}{2} \\
& = & 1 \pm \sqrt{j} \\
& = & 1 \pm \sqrt{e^{j\pi/2}} \\
& = & 1 \pm e^{j\pi/4} \\
& = & 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+j)
\end{array}$$

Damit ist

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_1 & = & 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} j \\
\lambda_2 & = & 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} j.
\end{array}$$

Aufgabe 8. (10 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und f eine Folge mit

$$f_k \quad = \quad \delta_{k+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i f_{k-i} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Folge f_k ist durch diese Gleichung nicht eindeutig definiert. Es gibt jedoch genau eine solche Folge f_k, die eine z-Transformierte $F(z)$ hat. Berechnen Sie dieses $F(z)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so, dass keine negativen Potenzen von z darin auftreten.

Lösung von Aufgabe 8.

$$\begin{array}{rcl}
F(z) & = & z + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i} F(z) \\
& = & z + F(z) \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i} \\
F(z)\left(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}\right) & = & z \\
F(z) & = & \dfrac{z}{1 - \sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}} \\
& = & \dfrac{z^{n+1}}{z^n - \sum_{i=1}^{n} a_i z^{n-i}}.
\end{array}$$

Aufgabe 9. (10 Punkte) Sei $u \in \mathbb{R}$ mit $u \neq -1$,

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \leq 0 \\ 1 & \text{falls } k = 1 \end{cases}$$

und

$$f_{k+2} = (1-u)f_{k+1} + uf_k \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

- Berechnen Sie die z-Transformierte $F(z)$ von f_k. Hinweis: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt
$$\sigma_k f_{k+2} = \sigma_k(1-u)f_{k+1} + \sigma_k u f_k.$$
- Transformieren Sie $F(z)$ in den Zeitbereich zurück um einen geschlossenen Term für f_k zu erhalten.
- Für welche Werte von u hat die Folge f_k einen endlichen Grenzwert? Berechnen Sie diesen.

Lösung von Aufgabe 9. Sei

$$\sigma_k f_k = F(z).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma_k f_{k+1} &= z\left(F(z) - \sum_{k=0}^{0} f_k z^{-k}\right) = zF(z) \\ \sigma_k f_{k+2} &= z^2\left(F(z) - \sum_{k=0}^{1} f_k z^{-k}\right) = z^2F(z) - z. \end{aligned}$$

Damit hat man im Bildbereich

$$\begin{aligned} z^2F(z) - z &= (1-u)zF(z) + uF(z) \\ z^2F(z) - (1-u)zF(z) - uF(z) &= z \\ F(z)(z^2 + (u-1)z - u) &= z \\ F(z) &= \frac{z}{z^2 + (u-1)z - u} \end{aligned}$$

Faktorisierung des Nenners.

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{1-u \pm \sqrt{(u-1)^2+4u}}{2} \\ &= \frac{1-u \pm \sqrt{u^2+2u+1}}{2} \\ &= \frac{1-u \pm \sqrt{(u+1)^2}}{2} \\ &= \frac{1-u \pm |u+1|}{2} \\ &= \frac{1-u \pm (u+1)}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= -u. \end{aligned}$$

Da $u \neq -1$ hat man zwei einfache, reelle Nullstellen.
Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+u)} &= \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+u} \\ z &= c_1(z+u) + c_2(z-1). \end{aligned}$$

Spezialfall $z = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} 1 &= c_1(1+u) \\ c_1 &= \frac{1}{1+u} \end{aligned}$$

Spezialfall $z = -u$ ergibt

$$\begin{aligned} -u &= c_2(-u-1) \\ c_2 &= \frac{u}{1+u} \end{aligned}$$

Damit ist

$$F(z) = \frac{1}{1+u}\frac{1}{z-1} + \frac{u}{1+u}\frac{1}{z+u}.$$

Rücktransformation ergibt

$$\begin{aligned} f_k &= \sigma_{k-1}\left(\frac{1}{1+u}1^{k-1} + \frac{u}{1+u}(-u)^{k-1}\right) \\ &= \sigma_{k-1}\frac{1}{1+u}\left(1+u(-u)^{k-1}\right) \\ &= \sigma_{k-1}\frac{1}{1+u}\left(1-(-u)^k\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } k \leq 0 \\ \frac{1}{1+u}\left(1-(-u)^k\right) & \text{für } k > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Folge ist konvergent falls $|-u| < 1$ bzw. $|u| < 1$. In diesem Fall ist

$$\lim_{k\to\infty} f_k = \frac{1}{1+u}.$$

Aufgabe 10. (10 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Berechnen Sie dann eine Basis für den Vektorraum der *reellen* Lösungsfunktionen des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Lösung von Aufgabe 10.

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ \det(A-\lambda E) &= (2-\lambda)(-\lambda)+2 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2j}{2} = 1 \pm j.$$

Eigenvektoren zu $\lambda = 1 + j$.

$$\begin{aligned} (A-\lambda E)\vec{v} &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 1-j & 2 \\ -1 & -1-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -x + (-1-j)y &= 0 \\ x &= (-1-j)y \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} (-1-j)y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1-j \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da A reell ist, erhält man folgende Eigenwerte und Eigenräume:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1+j \\ E_{1+j} &= \left\{ a\begin{pmatrix} -1-j \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\} \\ \lambda_2 &= 1-j \\ E_{1-j} &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1+j \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Komplexe Basislösungen des DGL Systems sind

$$\begin{pmatrix} -1-j \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+j)t}, \quad \begin{pmatrix} 1+j \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-j)t}.$$

Da das DGL System linear ist und die Basislösungen konjugiert komplex sind, kann man den Real- und Imaginärteil einer Basislösung nehmen.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1-j \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+j)t} &= \begin{pmatrix} -1-j \\ 1 \end{pmatrix} e^t(\cos(t) + j\sin(t)) \\
&= e^t \begin{pmatrix} (-1-j)(\cos(t)+j\sin(t)) \\ \cos(t)+j\sin(t) \end{pmatrix} \\
&= e^t \begin{pmatrix} -\cos(t)+\sin(t)+j(-\sin(t)-\cos(t)) \\ \cos(t)+j\sin(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Reelle Basislösungen sind somit

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= e^t \begin{pmatrix} -\cos(t)+\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\
y_2(t) &= e^t \begin{pmatrix} -\sin(t)-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 11. (10 Punkte) Sei $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $0 \le j \le n$.

Für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sei

$$A_{\vec{x}} = (\vec{a}_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Spalte}}}{\vec{x}}, \ldots, \vec{a}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die Matrix, die man aus A erhält wenn man deren j-te Spalte durch $\vec{x}$ ersetzt. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}
\det(A_{\vec{x}+\vec{y}}) &= \det(A_{\vec{x}}) + \det(A_{\vec{y}}) \\
\det(A_{u\vec{x}}) &= u\det(A_{\vec{x}})
\end{aligned}$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Entwickeln Sie die Determinanten nach der j-ten Spalte.

Lösung von Aufgabe 11. Sei $A^{(i,j)}$ die Matrix A ohne ihre i-te Zeile und j-te Spalte. Dann gilt für beliebiges $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\det\left(A^{(i,j)}\right) = \det\left(A_{\vec{x}}^{(i,j)}\right).$$

- Entwicklung nach der j-ten Spalte liefert

$$\begin{aligned}
\det(A_{\vec{x}+\vec{y}}) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}(x_i+y_i)\det\left(A_{\vec{x}+\vec{y}}^{(i,j)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}(x_i+y_i)\det\left(A^{(i,j)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}x_i\det\left(A^{(i,j)}\right) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}y_i\det\left(A^{(i,j)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}x_i\det\left(A_{\vec{x}}^{(i,j)}\right) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}y_i\det\left(A_{\vec{y}}^{(i,j)}\right) \\
&= \det(A_{\vec{x}}) + \det(A_{\vec{y}}).
\end{aligned}$$

- Entwicklung nach der j-ten Spalte liefert

$$\begin{aligned}
\det\left(A_{u\vec{x}}\right) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} u x_i \det\left(A_{u\vec{x}}^{(i,j)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} u x_i \det\left(A^{(i,j)}\right) \\
&= u \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} x_i \det\left(A^{(i,j)}\right) \\
&= u \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} x_i \det\left(A_{\vec{x}}^{(i,j)}\right) \\
&= u \det\left(A_{\vec{x}}\right).
\end{aligned}$$