Mathematik 3
Zusatzaufgaben

(Stand: 15. März 2019)

Prof. Dr. V. Stahl

Inhaltsverzeichnis

1 z-Transformation **3**

2 Diskrete LTI Systeme **8**

3 Lineare DGL Systeme mit konstanten Koeffizienten **13**
3.1 Eigenvektormethode 13
3.2 Lösung mit Laplace Transformation 16
3.3 Lösung mit e^{At} Ansatz 19
3.4 Lösung mit Hauptachsentransformation 23

4 Mehrstellige Differentialrechnung **26**
4.1 Partielle Ableitungen und Gradient 26
4.2 Tangentialebene 29
4.3 Mehrstellige Taylor Polynome 31

1 z-Transformation

Aufgabe 1. Ein Übertragungskanal mit Impulsantwort

$$f_k \quad = \quad \sigma_k \, k \, a^k$$

soll durch ein nachgeschaltetes System mit Impulsantwort g_k kompensiert werden. Damit das System realisierbar ist, wird ein Takt Verzögerung in Kauf genommen. Es soll also

$$(f * g)_k \quad = \quad \delta_{k-1}$$

gelten. Berechnen Sie hiermit die Übertragungsfunktion $G(z)$ und die Impulsantwort g_k des Kompensators.

Lösung von Aufgabe 1. Im Bildbereich gilt

$$\begin{aligned} F(z)G(z) &= z^{-1} \\ G(z) &= \frac{z^{-1}}{F(z)} \end{aligned}$$

Berechnung von $F(z)$.

$$\begin{aligned} \sigma_k a^k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{z}{z-a} \\ \sigma_k k a^k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & -z\left(\frac{z}{z-a}\right)' \\ = \quad & -z\frac{z-a-z}{(z-a)^2} \\ = \quad & \frac{az}{(z-a)^2} \\ = \quad & F(z). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} G(z) \quad = \quad & z^{-1}\frac{(z-a)^2}{az} \\ = \quad & \frac{(z-a)^2}{az^2} \\ = \quad & \frac{z^2-2az+a^2}{az^2} \\ = \quad & \frac{1}{a} - 2z^{-1} + az^{-2} \\ \bullet\!\!-\!\!\circ \quad & \frac{1}{a}\delta_k - 2\delta_{k-1} + a\delta_{k-2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} a^i$$

auf zwei Weisen.

- Zeigen Sie, dass

  $$af_k - f_k = a^{k+1} - 1$$

  ist, berechnen Sie die z-Transformierte auf beiden Seiten und lösen Sie nach $F(z)$ auf.
- Zeigen Sie, dass

  $$f_{k+1} - f_k = a^{k+1}$$

  ist, berechne Sie unter Verwendung des Verschiebungssatzes und $f_0 = 1$ die z-Transformierte auf beiden Seiten und lösen Sie nach $F(z)$ auf.

Lösung von Aufgabe 2.

- Mit

  $$\begin{aligned} af_k &= a\sum_{i=0}^{k} a^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} aa^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} a^{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} a^i \end{aligned}$$

  erhält man

  $$\begin{aligned} af_k - f_k &= \sum_{i=1}^{k+1} a^i - \sum_{i=0}^{k} a^i \\ &= a^{k+1} - a^0 \\ &= a^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

  Weiterhin gilt

  $$\begin{aligned} a^{k+1} &= aa^k \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ a\frac{z}{z-a} \end{aligned}$$

  und

  $$1 \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z}{z-1}$$

Damit erhält man aus

$$af_k - f_k = a^{k+1} - 1$$

durch z-Transformation auf beiden Seiten

$$\begin{aligned}
aF(z) - F(z) &= a\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-1} \\
F(z)(a-1) &= a\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-1} \\
&= \frac{az(z-1) - z(z-a)}{(z-1)(z-a)} \\
&= \frac{az^2 - az - z^2 + za}{(z-1)(z-a)} \\
&= \frac{az^2 - z^2}{(z-1)(z-a)} \\
&= \frac{z^2(a-1)}{(z-1)(z-a)} \\
F(z) &= \frac{z^2}{(z-1)(z-a)}
\end{aligned}$$

- Mit

$$\begin{aligned}
f_{k+1} - f_k &= \sum_{i=0}^{k+1} a^i - \sum_{i=0}^{k} a^i \\
&= a^{k+1}
\end{aligned}$$

und dem Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}
f_{k+1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & z(F(z) - f_0 z^{-0}) \\
= \quad & z(F(z) - 1)
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
z(F(z)-1) - F(z) &= a\frac{z}{z-a} \\
F(z)(z-1) &= a\frac{z}{z-a} + z \\
&= \frac{az + z^2 - za}{z-a} \\
&= \frac{z^2}{z-a} \\
F(z) &= \frac{z^2}{(z-1)(z-a)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge

$$f_k = k\,\sigma_{k-1}\,\cos(k-1).$$

Sie müssen die entstehenden Terme *nicht* vereinfachen.

Lösung von Aufgabe 3. Aus

$$\begin{aligned}\sigma_k \cos(k) &= \sigma_k\,\frac{1}{2}\left(e^{jk}+e^{-jk}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma_k e^{jk}+\sigma_k e^{-jk}\right)\end{aligned}$$

und

$$\sigma_k e^{ak} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-e^a}$$

folgt

$$\sigma_k \cos(k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^j}+\frac{z}{z-e^{-j}}\right).$$

Mit dem Verschiebungssatz

$$f_{k-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-1}F(z)$$

folgt

$$\begin{aligned}\sigma_{k-1}\cos(k-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-e^j}+\frac{1}{z-e^{-j}}\right)\\ = \quad & \frac{1}{2}\left((z-e^j)^{-1}+(z-e^{-j})^{-1}\right).\end{aligned}$$

Mit der Ableitung im Frequenzbereich

$$k f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -zF'(z)$$

folgt

$$\begin{aligned}k\,\sigma_{k-1}\,\cos(k-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad & \frac{-z}{2}\left(-(z-e^j)^{-2}-(z-e^{-j})^{-2}\right)\\ = \quad & \frac{z}{2}\left(\frac{1}{(z-e^j)^2}+\frac{1}{(z-e^{-j})^2}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sei f_k eine Folge mit

$$\sigma_k f_k \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z).$$

Berechnen Sie hiermit die z-Transformierte von

$$2^{k+1}\sigma_{k-2}f_{k-1}.$$

Hinweis:

$$\sigma_{k-2} \quad = \quad \sigma_{k-1}-\delta_{k-1}.$$

Verwenden Sie die Ausblendeigenschaft.

Lösung von Aufgabe 4.

$$\begin{aligned} 2^{k+1}\sigma_{k-2}f_{k-1} &= 2^{k+1}(\sigma_{k-1}-\delta_{k-1})f_{k-1} \\ &= 2^{k+1}(\sigma_{k-1}f_{k-1}-\delta_{k-1}f_{k-1}) \\ &= 2^{k+1}(\sigma_{k-1}f_{k-1}-\delta_{k-1}f_0) \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} \sigma_k f_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z) \\ \delta_k &\circ\!\!-\!\!\bullet\ 1 \end{aligned}$$

folgt

$$\sigma_k f_k - \delta_k f_0 \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z) - f_0.$$

Mit der Verschiebung im Zeitbereich erhält man

$$\sigma_{k-1}f_{k-1} - \delta_{k-1}f_0 \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^{-1}(F(z) - f_0)$$

Mit dem Dämpfungssatz und Linearität erhält man

$$\begin{aligned} 2^{k+1}(\sigma_{k-1}f_{k-1} - \delta_{k-1}f_0) &= 2(2^k)(\sigma_{k-1}f_{k-1} - \delta_{k-1}f_0) \\ &\circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\big((z/2)^{-1}(F(z/2) - f_0) \\ &= 4z^{-1}(F(z/2) - f_0). \end{aligned}$$

2 Diskrete LTI Systeme

Aufgabe 5. Sei S ein diskretes System mit

$$[S(f)]_k \quad = \quad \sigma_{k-1} f_k.$$

- Berechnen Sie $\left[S(f_{.-\hat{k}})\right]_k$ und $\left[S(f)_{.-\hat{k}}\right]_k$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.
  Der Index $. - \hat{k}$ bedeutet hierbei die Verschiebung um $\hat{k}$ Takte, d.h.

$$(f_{.-\hat{k}})_k \quad = \quad f_{k-\hat{k}}.$$

- Ist f linear? Ist f zeitinvariant?

Lösung von Aufgabe 5.

$$\begin{aligned}
\left[S(f_{.-\hat{k}})\right]_k &= \sigma_{k-1}(f_{.-\hat{k}})_k \\
&= \sigma_{k-1} f_{k-\hat{k}} \\
\left[S(f)_{.-\hat{k}}\right]_k &= [S(f)]_{k-\hat{k}} \\
&= \sigma_{k-\hat{k}-1} f_{k-\hat{k}}.
\end{aligned}$$

S ist linear aber nicht zeitinvariant.

Aufgabe 6. Sei S ein System, das eine Folge f wie folgt transformiert:

$$[S(f)]_k \quad = \quad \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i f_i.$$

Ist das System linear? Ist es zeitinvariant? Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung von Aufgabe 6. Das System ist linear.

$$\begin{aligned}
[S(f+g)]_k &= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i (f+g)_i \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i (f_i + g_i) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i f_i + 3^i g_i \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i f_i + \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i g_i \\
&= [S(f)]_k + [S(g)]_k \\
&= [S(f) + S(g)]_k \\
[S(af)]_k &= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i (af)_i \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i a(f_i) \\
&= a \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i f_i \\
&= a[S(f)]_k.
\end{aligned}$$

Das System ist nicht zeitinvariant. Ersetzt man f durch $f_{\cdot-\hat{k}}$ in der Definition von S erhält man

$$\begin{aligned}
\left[S(f_{\cdot-\hat{k}})\right]_k &= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i (f_{\cdot-\hat{k}})_i \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k} 3^i f_{i-\hat{k}} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{k-\hat{k}} 3^{i+\hat{k}} f_i \\
&= 3^{\hat{k}} \sum_{i=-\infty}^{k-\hat{k}} 3^i f_i \\
&= 3^{\hat{k}} \, [S(f)]_{k-\hat{k}} \\
&\neq [S(f)]_{k-\hat{k}} \, .
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\left[S(f_{\cdot-\hat{k}})\right]_k \neq [S(f)]_{k-\hat{k}}$$

bzw.

$$S(f_{\cdot-\hat{k}}) \neq S(f)_{\cdot-\hat{k}}.$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die inverse z-Transformierte von

$$\frac{2+z^{-1}}{1-z^{-2}}$$

auf folgende Weisen:

- Durch geschicktes Umformen und Anwenden von Korrespondenzen aus der Formelsammlung.
- Berechnen der ersten 5 Glieder der Folge durch Polynomdivision.
- Partialbruchzerlegung.
- Entwurf eines rekursiven Filters, dessen Übertragungsfunktion gleich der gegebenen Funktion ist und Berechnen der Impulsantwort dieses Filters im Zeitbereich.

Lösung von Aufgabe 7.

- Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{2+z^{-1}}{1-z^{-2}} &= \frac{2z^2+z}{z^2-1} \\
&= \frac{z^2}{z^2-1} + \frac{z^2+z}{z^2-1} \\
&= \frac{z^2}{(z-1)(z+1)} + \frac{z(z+1)}{(z-1)(z+1)} \\
&= \frac{z}{z-1}\frac{z}{z+1} + \frac{z}{(z-1)} \\
\bullet\!\!-\!\!\circ\ &\langle 1,1,1,\ldots\rangle * \langle 1,-1,1,-1,\ldots\rangle + \sigma_k \\
&= \langle 1,0,1,0,\ldots\rangle + \sigma_k \\
&= \langle 2,1,2,1,\ldots\rangle.
\end{aligned}$$

- Polynomdivision

$$\begin{aligned}
&2+z^{-1} : 1-z^{-2} = 2+z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}+2z^{-4}+\ldots \\
&\underline{2-2z^{-2}} \\
&z^{-1}+2z^{-2} \\
&\underline{z^{-1}-z^{-3}} \\
&2z^{-2}+z^{-3} \\
&\underline{2z^{-2}-2z^{-4}} \\
&z^{-3}+2z^{-4} \\
&\underline{z^{-3}-z^{-5}} \\
&2z^{-4}+z^{-5} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

- Partialbruchzerlegung

$$\frac{2+z^{-1}}{1-z^{-2}} = \frac{2z^2+z}{z^2-1}$$

Ganzrationalen Teil abspalten

$$\frac{2z^2+z}{z^2-1} = 2 + \frac{z+2}{z^2-1}$$

Faktorisierung des Nenners

$$z^2-1 \quad = \quad (z-1)(z+1)$$

Ansatz für den gebrochenen Teil

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{z^2-1} &= \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+1} \\ z+2 &= c_1(z+1) + c_2(z-1) \end{aligned}$$

Spezialfall $z = 1$

$$\begin{aligned} 3 &= 2c_1 \\ c_1 &= 3/2 \end{aligned}$$

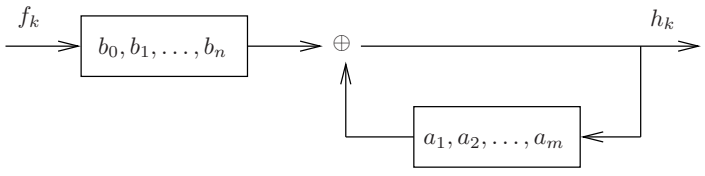
Spezialfall $z = -1$

$$\begin{aligned} 1 &= -2c_2 \\ c_2 &= -1/2 \end{aligned}$$

Rücktransformation

$$\begin{aligned} 2 + \frac{3}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad & 2\delta_k + \frac{3}{2}\sigma_{k-1} - \frac{1}{2}\sigma_{k-1}(-1)^{k-1} \\ = \quad & \frac{1}{2}\delta_k + \frac{3}{2}\sigma_k - \frac{1}{2}\sigma_{k-1}(-1)^{k-1} \\ = \quad & \frac{1}{2}\delta_k + \frac{3}{2}\sigma_k + \frac{1}{2}\sigma_{k-1}(-1)^{k} \\ = \quad & \frac{3}{2}\sigma_k + \frac{1}{2}\sigma_k(-1)^{k} \\ = \quad & \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{k} \\ = \quad & \langle 2, 1, 2, 1, \ldots \rangle \end{aligned}$$

- Ein rekursiver Filter sieht schematisch wie folgt aus:



Der Ausgang h_k ist

$$h_k \quad = \quad b_0 f_k + b_1 f_{k-1} + \ldots b_n f_{k-n} + a_1 h_{k-1} + a_2 h_{k-2} + \ldots + a_m h_{k-m}.$$

Bringt man alle h-Terme auf eine Seite, erhält man die Differenzengleichung

$$h_k - a_1 h_{k-1} - a_2 h_{k-2} - \ldots - a_m h_{k-m} \quad = \quad b_0 f_k + b_1 f_{k-1} + \ldots b_n f_{k-n}.$$

Dies lässt sich mit Hilfe von Faltungen umformen in

$$(h * \langle 1, -a_1, -a_2, \ldots, -a_m \rangle)_k \quad = \quad (f * \langle b_0, b_1, \ldots, b_n \rangle)_k$$

Sei nun

$$\begin{aligned} \langle 1, -a_1, -a_2, \ldots, -a_m \rangle \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \ldots - a_m z^{-m} \\ &= \quad A(z) \\ \langle b_0, b_1, \ldots, b_n \rangle \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n} \\ &= \quad B(z). \end{aligned}$$

Dann gilt mit dem Faltungssatz

$$\begin{aligned} H(z)A(z) &= F(z)B(z) \\ H(z) &= F(z)\frac{B(z)}{A(z)}. \end{aligned}$$

Für die Übertragungsfunktion des Filters gilt somit

$$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \ldots - a_m z^{-m}} \quad = \quad \frac{2 + z^{-1}}{1 - z^{-2}}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{aligned} b_0 &= 2 \\ b_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \end{aligned}$$

und alle anderen Koeffizienten sind Null. Damit erhält man

$$h_k \quad = \quad 2f_k + f_{k-1} + h_{k-2}$$

Um die Impulsantwort zu berechnen setzt man nun $f_k = \delta_k$ und erhält

$$\begin{aligned} h_0 &= 2\delta_0 + \delta_{-1} + h_{-2} \\ &= 2 \\ h_1 &= 2\delta_1 + \delta_0 + h_{-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Für $k \geq 2$ und $f_k = \delta_k$ erhält man

$$h_k \quad = \quad h_{k-2}$$

und damit ist

$$h_k \quad = \quad \langle 2, 1, 2, 1, \ldots \rangle$$

3 Lineare DGL Systeme mit konstanten Koeffizienten

3.1 Eigenvektormethode

Aufgabe 8. Für welchen Wert von a hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1+a & 1 \end{pmatrix}$$

einen doppelten Eigenwert? Berechnen Sie für dieses a den Eigenwert λ und die Menge der zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}$.

Lösung von Aufgabe 8. Eigenwerte.

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1+a & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ \det(A-\lambda E) &= (1-\lambda)^2 - 2(1+a) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 2 - 2a \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 1 - 2a. \end{aligned}$$

Nullstellen.

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(1+2a)}}{2}.$$

Doppelte Nullstelle wenn

$$a = -1.$$

In diesem Fall ist der Eigenwert

$$\lambda = 1.$$

Eigenvektoren zu $a = -1$ und $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2y &= 0 \\ y &= 0 \\ \vec{v} &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Eigenwerte und zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ \det(A - \lambda E) &= (2-\lambda)(-\lambda) + 1 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ &= (\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

Die Matrix hat einen doppelten Eigenwert $\lambda = 1$.

Eigenvektoren.

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)\vec{v} &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x + y &= 0 \\ y &= -x. \end{aligned}$$

Damit sind alle Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x \neq 0$$

Eigenvektoren von A zum Eigenwert 1. Eine Basis dieses Eigenraums ist

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10. Finden Sie a, b so dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

einen doppelten Eigenwert $\lambda = 3$ hat.

Berechnen Sie für diese Werte von a, b dann den zugehörigen Eigenraum der Matrix zum Eigenwert $\lambda = 3$.

Lösung von Aufgabe 10.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & a \\ 1 & b-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(b-\lambda) - a \\ &= \lambda^2 - (2+b)\lambda + 2b - a. \end{aligned}$$

Dies ist ein Polynom zweiten Grades mit führendem Koeffizienten 1. Es hat genau dann eine doppelte Nullstelle $\lambda = 3$ wenn es gleich ist mit

$$(\lambda - 3)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} 2 + b &= 6 \\ 2b - a &= 9 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$b = 4.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung gibt

$$a = -1.$$

Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ A - \lambda E &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x + y &= 0 \\ y &= -x \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.2 Lösung mit Laplace Transformation

Aufgabe 11. Gegeben sei das DGL System

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 1$.

- Bestimmen Sie die Lösung des DGL Systems mit der Eigenwertmethode.
- Bestimmen Sie die Lösung des DGL Systems mit Laplace Transformation.

Lösung von Aufgabe 11.

Lösung mit der Eigenwertmethode. Eigenwertproblem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} = \lambda \vec{v}.$$

Charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)(-2-\lambda) \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 3}{2}. \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basis des Eigenraums ist z.B.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basis des Eigenraums ist z.B.

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Basislösungen

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Allgemeine Lösung

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Anfangswerte.

$$c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$c_1 = 1/3, \quad c_2 = 2/3.$$

Lösung mit Anfangswerten.

$$\vec{x}(t) \;=\; \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \;=\; \begin{pmatrix} -e^t \\ \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Lösung mit Laplace Transformation.

$$\begin{aligned}
s\vec{X}(s) - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{X}(s) \\
\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \vec{X}(s) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\vec{X}(s) &= \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \begin{pmatrix} -s-2 \\ s \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung von $X_1(s)$.

$$\begin{aligned}
\frac{-s-2}{(s-1)(s+2)} &= \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s+2} \\
-s-2 &= c_1(s+2) + c_2(s-1)
\end{aligned}$$

Mit $s = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
3c_1 &= -3 \\
c_1 &= -1
\end{aligned}$$

Mit $s = -2$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= c_2(-3) \\ c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{-1}{s-1} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad -e^t \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung von $X_2(s)$.

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s-1)(s+2)} &= \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s+2} \\ s &= c_1(s+2) + c_2(s-1) \end{aligned}$$

Mit $s = 1$ folgt

$$\begin{aligned} 1 &= 3c_1 \\ c_1 &= 1/3 \end{aligned}$$

Mit $s = -2$ folgt

$$\begin{aligned} -2 &= c_2(-3) \\ c_2 &= 2/3 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \frac{1/3}{s-1} + \frac{2/3}{s+2} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t} \end{aligned}$$

Die Lösung des DGL Systems ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

3.3 Lösung mit e^{At} Ansatz

Aufgabe 12. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie e^{At}.

Lösung von Aufgabe 12.

$$\begin{aligned} sE - A &= \begin{pmatrix} s-1 & 3 \\ -3 & s+5 \end{pmatrix} \\ (sE-A)^{-1} &= \frac{1}{(s-1)(s+5)+9} \begin{pmatrix} s+5 & -3 \\ 3 & s-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+2)^2} \begin{pmatrix} s+5 & -3 \\ 3 & s-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rücktransformation.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; t \\ \frac{1}{(s+2)^2} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; te^{-2t} \\ \frac{s}{(s+2)^2} &= \frac{s+2}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)^2} \\ &= \frac{1}{s+2} - 2\frac{1}{(s+2)^2} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (sE-A)^{-1} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; te^{-2t} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + (e^{-2t} - 2te^{-2t}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1+3t & -3t \\ 3t & 1-3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 13. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Berechenen Sie e^{At}. Hinweis: Sie brauchen hierfür *keine* Partialbruchzerlegung.
- Berechnen Sie die Lösung des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t), \qquad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung von Aufgabe 13.

$$\begin{aligned} sE - A &= \begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix} \\ (sE-A)^{-1} &= \frac{1}{(s-1)(s+1)+2} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2+1} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus der Tablle entnimmt man

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2+1} &\bullet\!\!-\!\!\circ \sin(t) \\ \frac{s}{s^2+1} &\bullet\!\!-\!\!\circ \cos(t) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2+1} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix} &\bullet\!\!-\!\!\circ \begin{pmatrix} \sin(t)+\cos(t) & \sin(t) \\ -2\sin(t) & -\sin(t)+\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \sin(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{At}. \end{aligned}$$

Die Lösung des DGL System ist

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= e^{At}\vec{x}_0 \\ &= \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Sei

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{u}(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \delta(t-1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie e^{At}.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

c) Berechnen Sie *eine partikuläre Lösung* des o.g. DGL Systems.
Hinweis: Die Faltung mit $\vec{u}(t)$ im Zeitbereich ist sehr einfach und erfordert keine Integration.

Lösung von Aufgabe 14.

a) Matrix e^{At}.

$$\begin{aligned} sE - A &= \begin{pmatrix} s-3 & 1 \\ -1 & s-5 \end{pmatrix} \\ (sE-A)^{-1} &= \frac{1}{(s-3)(s-5)+1} \begin{pmatrix} s-5 & -1 \\ 1 & s-3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2-8s+16} \begin{pmatrix} s-5 & -1 \\ 1 & s-3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-4)^2} \begin{pmatrix} s-5 & -1 \\ 1 & s-3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rücktransformation.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; t \\ \frac{1}{(s-4)^2} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; te^{4t} \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} f(t) &= te^{4t} \\ F(s) &= \frac{1}{(s-4)^2} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s-4)^2} &= sF(s) - f(0) \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\; f'(t) \\ &= e^{4t} + 4te^{4t}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sigma(t) \begin{pmatrix} e^{4t} + 4te^{4t} - 5te^{4t} & -te^{4t} \\ te^{4t} & e^{4t} + 4te^{4t} - 3te^{4t} \end{pmatrix} \\ &= \sigma(t)e^{4t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Eigenwerte und Eigenvektoren.

$$\begin{aligned} A-\lambda E &= \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ \det(A-\lambda E) &= (3-\lambda)(5-\lambda)+1 \\ &= \lambda^2-8\lambda+16 \\ &= (\lambda-4)^2. \end{aligned}$$

Damit ist $\lambda = 4$ ein doppelter Eigenwert.
Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 4$.

$$\begin{aligned} (A-\lambda E)\vec{v} &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x+y &= 0 \\ y &= -x \end{aligned}$$

Basis des Eigenraums ist z.B.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) Laplace Transformation des DGL Systems.

$$\begin{aligned} s\vec{X}(s)-\vec{x}_0 &= A\vec{X}(s)+\vec{U}(s) \\ (sE-A)\vec{X}(s) &= \vec{x}_0+\vec{U}(s) \\ \vec{X}(s) &= (sE-A)^{-1}\vec{x}_0+(sE-A)^{-1}\vec{U}(s) \\ \vec{x}(t) &= e^{At}\vec{x}_0+e^{At}*\vec{u}(t). \end{aligned}$$

Mit

$$f(t)*\delta(t-1) = f(t-1)$$

erhält man eine partikuläre Lösung z.B. für $\vec{x}_0 = \vec{0}$ durch

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= e^{At}*\vec{u}(t) \\ &= \sigma(t)e^{4t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} \delta(t-1) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma(t)e^{4t}(1-t)*\delta(t-1) \\ \sigma(t)e^{4t}t*\delta(t-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma(t-1)e^{4(t-1)}(1-(t-1)) \\ \sigma(t-1)e^{4(t-1)}(t-1) \end{pmatrix} \\ &= \sigma(t-1)e^{4(t-1)}\begin{pmatrix} 1-(t-1) \\ t-1 \end{pmatrix} \\ &= \sigma(t-1)e^{4(t-1)}\begin{pmatrix} 2-t \\ t-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.4 Lösung mit Hauptachsentransformation

Aufgabe 15. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D so dass

$$T^{-1}AT = D.$$

- Berechnen Sie die allgemeine Lösung des DGL Systems

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Lösung von Aufgabe 15. Eigenwerte von A.

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ \det(A-\lambda E) &= (2-\lambda)(3-\lambda) \\ \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 3. \end{aligned}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -2x + y &= 0 \\ y &= 2x \\ \vec{v}_1 &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x &= 0 \\ \vec{v}_2 &= x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des DGL Systems ist damit

$$\vec{x}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}$$

Aufgabe 16. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D so dass

$$T^{-1}AT = D.$$

Lösung von Aufgabe 16. Eigenwerte von A.

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ \det(A-\lambda E) &= (1-\lambda)(-1-\lambda)+2 \\ &= \lambda^2 + 1. \end{aligned}$$

Eigenwerte

$$\lambda_1 = j, \quad \lambda_2 = -j.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = j$

$$\begin{aligned} (A-\lambda_1 E)\vec{v}_1 &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 1-j & 1 \\ -2 & -1-j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (1-j)x + y &= 0 \\ y &= (-1+j)x \\ \vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} x \\ (-1+j)x \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 1 \\ -1+j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -j$ sind konjugiert komplex, d.h.

$$\vec{v}_2 = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1-j \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+j & -1-j \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 17. Von dem DGL System

$$\vec{y}' = A\vec{y}.$$

sei eine Lösung $\vec{y}$ gegeben. Berechnen Sie hieraus eine Lösung $\vec{x}$ von

$$\vec{x}' = T^{-1}AT\vec{x}.$$

Lösung von Aufgabe 17. Sei

$$\vec{x} = T^{-1}\vec{y}.$$

Zu zeigen ist

$$\vec{x}' = T^{-1}AT\vec{x}.$$

Durch einsetzen folgt

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= T^{-1}\vec{y}' \\ &= T^{-1}A\vec{y} \\ &= T^{-1}AT\vec{x}. \end{aligned}$$

4 Mehrstellige Differentialrechnung

4.1 Partielle Ableitungen und Gradient

Aufgabe 18. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

und $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}} A \vec{x}.$$

Berechnen Sie $\nabla f(\vec{x})$.

Zeigen Sie dann, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}} A \vec{x}$$

gilt

$$\nabla f(\vec{x}) = (A + A^{\mathrm{T}})\vec{x}.$$

Lösung von Aufgabe 18. Mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x\ y) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x\ y) \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 4x + 7y \end{pmatrix} \\ &= 3x^2 - 2xy + 4xy + 7y^2 \\ &= 3x^2 + 2xy + 7y^2 \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= 6x + 2y \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= 2x + 14y \end{aligned}$$

und damit

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y \\ 2x + 14y \end{pmatrix}.$$

Sei

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n).$$

Dann ist

$$A\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j$$

und

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{\mathrm{T}} A\vec{x} &= \vec{x} \circ (A\vec{x}) \\
&= \sum_{i=j}^{n} x_j (\vec{x} \circ \vec{a}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.
\end{aligned}$$

Bei der partiellen Ableitung nach x_k sind nur die Summanden relevant, bei denen entweder $i = k$, $j = k$ oder $i = j = k$ ist. Übrig bleibt somit

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i \neq k \\ j=k}} a_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{i=k \\ j \neq k}} a_{ij} x_i x_j + a_{kk} x_k^2 \\
&= \sum_{i \neq k} a_{ik} x_i x_k + \sum_{j \neq k} a_{kj} x_k x_j + a_{kk} x_k^2 \\
&= \sum_{i \neq k} a_{ik} x_i x_k + \sum_{i \neq k} a_{ki} x_k x_i + a_{kk} x_k^2 \\
&= \sum_{i \neq k} (a_{ik} + a_{ki}) x_i x_k + a_{kk} x_k^2.
\end{aligned}$$

Ableiten nach x_k ergibt damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{x}) &= \sum_{i \neq k} (a_{ik} + a_{ki}) x_i + 2 a_{kk} x_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_{ik} + a_{ki}) x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (A + A^{\mathrm{T}})_{ki} x_i \\
&= \left[(A + A^{\mathrm{T}}) \vec{x} \right]_k
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\nabla f(\vec{x}) = (A + A^{\mathrm{T}}) \vec{x}.$$

Aufgabe 19. Sei $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(\vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)$$

wobei a_i, b_i Konstanten sind. Berechnen Sie allgemein für $j = 1, 2, \ldots, n$ die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}).$$

Sie müssen das Ergebnis nicht ausmultiplizieren. Hinweis: Benutzen Sie die Produktregel und berechnen Sie zuerst die Ableitung der Faktoren.

Lösung von Aufgabe 19.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2\right) &= 2a_j x_j. \\
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right) &= b_j \\
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right) &= 2a_j x_j \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right) + b_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2\right).
\end{aligned}$$

4.2 Tangentialebene

Aufgabe 20. Berechnen Sie die Linearisierung $\ell(x, y)$ der Funktion

$$f(x, y) = e^{x/y} + \cos(\pi x)$$

im Entwicklungspunkt

$$\hat{x} = 1, \qquad \hat{y} = 2.$$

Bringen Sie das Ergebnis auf die Form

$$\ell(x, y) = a + bx + cy$$

wobei a, b, c Konstanten sind.

Lösung von Aufgabe 20. Partielle Ableitungen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{1}{y} e^{x/y} - \pi \sin(\pi x) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= -\frac{x}{y^2} e^{x/y} \end{aligned}$$

Auswerten im Arbeitspunkt.

$$\begin{aligned} f(1, 2) &= e^{1/2} - 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(1, 2) &= \frac{1}{2} e^{1/2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(1, 2) &= -\frac{1}{4} e^{1/2} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \ell(x, y) &= e^{1/2} - 1 + \frac{1}{2} e^{1/2}(x - 1) - \frac{1}{4} e^{1/2}(y - 2) \\ &= e^{1/2} - 1 - \frac{1}{2} e^{1/2} + \frac{1}{2} e^{1/2} + \frac{1}{2} e^{1/2} x - \frac{1}{4} e^{1/2} y \\ &= e^{1/2} - 1 + \frac{1}{2} e^{1/2} x - \frac{1}{4} e^{1/2} y. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{e} - 1 \\ b &= \frac{1}{2}\sqrt{e} \\ c &= -\frac{1}{4}\sqrt{e} \end{aligned}$$

Aufgabe 21. Berechnen Sie die Linearisierung $\ell(x, y)$ der Funktion

$$f(x, y) \quad = \quad \ln(xy)\sin(x)y$$

im Entwicklungspunkt

$$\hat{x} = \pi/2, \qquad \hat{y} = 2.$$

Bringen Sie das Ergebnis auf die Form

$$\ell(x, y) \quad = \quad a + bx + cy$$

wobei a, b, c Konstanten sind.

Lösung von Aufgabe 21.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \left(\frac{1}{xy} y \sin(x) + \ln(xy)\cos(x)\right) y \\
&= \left(\frac{\sin(x)}{x} + \ln(xy)\cos(x)\right) y \\
\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= \sin(x)\left(\frac{1}{xy} xy + \ln(xy)\right) \\
&= \sin(x)(1 + \ln(xy)) \\
\frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}, \hat{y}) &= \left(\frac{1}{\pi/2} + \ln(\pi)0\right) 2 \\
&= \frac{4}{\pi} \\
\frac{\partial}{\partial y} f(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 + \ln(\pi) \\
f(\hat{x}, \hat{y}) &= 2\ln(\pi) \\
\ell(x, y) &= 2\ln(\pi) + \frac{4}{\pi}(x - \pi/2) + (1 + \ln(\pi))(y - 2) \\
&= 2\ln(\pi) + \frac{4x}{\pi} - 2 + (1 + \ln(\pi))y - 2 - 2\ln(\pi) \\
&= -4 + \frac{4x}{\pi} + (1 + \ln(\pi))y.
\end{aligned}$$

4.3 Mehrstellige Taylor Polynome

Aufgabe 22. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad \ln(x/y) + xy$$

zum Entwicklungspunkt $(\hat{x}, \hat{y}) = (1,1)$. Sie müssen das Polynom nicht vereinfachen.

Lösung von Aufgabe 22. Vereinfachen ergibt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \ln(x) - \ln(y) + xy \\ f_x(x,y) &= y + \frac{1}{x} \\ f_y(x,y) &= x - \frac{1}{y} \\ f_{xx}(x,y) &= -\frac{1}{x^2} \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{1}{y^2} \\ f_{xy}(x,y) &= 1 \end{aligned}$$

Auswerten bei $x = 1$ und $y = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 1 \\ f_x(1,1) &= 2 \\ f_y(1,1) &= 0 \\ f_{xx}(1,1) &= -1 \\ f_{yy}(1,1) &= 1 \\ f_{xy}(1,1) &= 1 \end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom

$$p(x,y) \quad = \quad 1 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2 + (x-1)(y-1).$$

Aufgabe 23. Berechnen Sie das Taylor Polynom $p(x)$ vom Grad 2 der Funktion

$$f(x,y) = \frac{e^{3x}}{y}$$

zum Entwicklungspunkt $(\hat{x},\hat{y}) = (0,1)$. Vereinfachen Sie das Polynom durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 23. Partielle Ableitungen.

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{1}{y}3e^{3x} \\
f_y(x,y) &= -\frac{1}{y^2}e^{3x} \\
f_{xx}(x,y) &= \frac{1}{y}9e^{3x} \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{2}{y^3}e^{3x} \\
f_{xy}(x,y) &= -\frac{1}{y^2}3e^{3x}
\end{aligned}$$

Auswerten bei $(\hat{x},\hat{y})$:

$$\begin{aligned}
f(0,1) &= 1 \\
f_x(0,1) &= 3 \\
f_y(0,1) &= -1 \\
f_{xx}(0,1) &= 9 \\
f_{yy}(0,1) &= 2 \\
f_{xy}(0,1) &= -3
\end{aligned}$$

Damit ist das Taylor Polynom

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= \sum_{i+j\leq 2} \frac{1}{i!j!} f^{(i,j)}(0,1)x^i(y-1)^j \\
&= 1 + 3x - (y-1) + \frac{1}{2}9x^2 + \frac{1}{2}2(y-1)^2 - 3x(y-1) \\
&= 1 + 3x - y + 1 + \frac{9}{2}x^2 + y^2 - 2y + 1 - 3xy + 3x \\
&= 3 + 6x - 3y + \frac{9}{2}x^2 + y^2 - 3xy
\end{aligned}$$

Aufgabe 24. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 der Funktion

$$f(x,y) = e^x \cos(y) + xy$$

zum Entwicklungspunkt $(\hat{x}, \hat{y}) = (0,0)$. Vereinfachen Sie das Polynom durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen so weit wie möglich.

Lösung von Aufgabe 24. Partielle Ableitungen.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^x \cos(y) + y \\ f_{xx}(x,y) &= e^x \cos(y) \\ f_y(x,y) &= -e^x \sin(y) + x \\ f_{yy}(x,y) &= -e^x \cos(y) \\ f_{xy}(x,y) &= -e^x \sin(y) + 1 \end{aligned}$$

Auswerten bei $\hat{x} = 0$, $\hat{y} = 0$.

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 1 \\ f_x(0,0) &= 1 \\ f_{xx}(0,0) &= 1 \\ f_y(0,0) &= 0 \\ f_{yy}(0,0) &= -1 \\ f_{xy}(0,0) &= 1 \end{aligned}$$

Taylor Polynom.

$$p(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy.$$

Aufgabe 25. Sei

$$f(x,y) = y + e^{xy}.$$

Hat die Funktion stationäre Punkte? Falls ja, entscheiden Sie von jedem stationären Punkt ob es sich um ein lokakes Maximum oder Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt.

Lösung von Aufgabe 25. Partielle Ableitungen.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^{xy} \\ f_y(x,y) &= 1 + xe^{xy} \end{aligned}$$

Nullsetzen.

$$\begin{aligned} ye^{xy} &= 0 \\ 1 + xe^{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $y = 0$. Eingesetzt in die zweite erhält man

$$\begin{aligned} 1 + x &= 0 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Die Funktion hat einen stationären Punkt $x = -1, y = 0$.

Zweite partielle Ableitungen.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= y^2 e^{xy} \\ f_{xy}(x,y) &= e^{xy} + xye^{xy} \\ f_{yy}(x,y) &= x^2 e^{xy}. \end{aligned}$$

Auswerten beim stationären Punkt.

$$\begin{aligned} f_{xx}(-1,0) &= 0 \\ f_{xy}(-1,0) &= 1 \\ f_{yy}(-1,0) &= 1 \end{aligned}$$

Hessematrix.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte der Hessematrix.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 1. \end{aligned}$$

Nullstellen.

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Da $\sqrt{5} > 1$ ist ein Eigenwert positiv und ein Eigenwert negativ. Die Hessematrix ist daher indefinit und es liegt ein Sattelpunkt vor.

Aufgabe 26. Berechnen Sie das Taylor Polynom vom Grad 2 für

$$f(x,y) = xy + e^y$$

zum Entwicklungspunkt $\hat{x} = 0$, $\hat{y} = 0$. Hinweis: Beginnen Sie mit dem Ansatz

$$p(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy$$

und berechnen Sie die Koeffizienten aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} f(\hat{x},\hat{y}) &= p(\hat{x},\hat{y}) \\ f_x(\hat{x},\hat{y}) &= p_x(\hat{x},\hat{y}) \\ f_y(\hat{x},\hat{y}) &= p_y(\hat{x},\hat{y}) \\ f_{xx}(\hat{x},\hat{y}) &= p_{xx}(\hat{x},\hat{y}) \\ f_{yy}(\hat{x},\hat{y}) &= p_{yy}(\hat{x},\hat{y}) \\ f_{xy}(\hat{x},\hat{y}) &= p_{xy}(\hat{x},\hat{y}). \end{aligned}$$

Die Indizes drücken hierbei partielle Ableitungen aus, also z.B.

$$f_{xy}(\hat{x},\hat{y}) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\hat{x},\hat{y}).$$

Lösung von Aufgabe 26. Durch Berechnung der partiellen Ableitungen erhält man die Bedingungen

$$\begin{aligned} xy + e^y &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy \\ y &= a_1 + 2a_3 x + a_5 y \\ x + e^y &= a_2 + 2a_4 y + a_5 x \\ 0 &= 2a_3 \\ e^y &= 2a_4 \\ 1 &= a_5. \end{aligned}$$

Einsetzen von $\hat{x} = 0$, $\hat{y} = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 \\ 0 &= a_1 \\ 1 &= a_2 \\ 0 &= 2a_3 \\ 1 &= 2a_4 \\ 1 &= a_5 \end{aligned}$$

d.h.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 1/2, \quad a_4 = 1/2, \quad a_5 = 1.$$

und somit

$$p(x,y) = 1 + y + 1/2y^2 + xy.$$